

花蓮縣第 66 屆國民中小學科學展覽會
作品說明書

科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：三角形兩腰的和差積比為定值時的心軌玄機

關 鍵 詞：軌跡、曲線、四心

編 號：

摘要

本研究從課本中直角三角形外心特性產生靈感，因而展開關於三角形兩腰之和、差、積、比分別為定值時，觀察該三角形之四心軌跡，並求出四心軌跡的相關性質及關係式。其中外心軌跡為鉛直線運動；重心以原圖形縮小 $\frac{1}{3}$ （包括座標及定義之常數）；垂心會以四次或八次圖形為軌跡；內心則以橢圓、雙直線、三次函數之部分圖形運動。研究的過程中，藉由控制 θ 角來描述三角形頂點及四心情形，亦嘗試證明 x 、 y 座標兩者的關係式，並使用 GSP 或 GeoGebra 證明結果。

壹、研究動機

在上學期課本中提到，若將三角形的底邊放在圓直徑兩端，三角形頂點在半圓周移動，因為是直角三角形，所以外心同時也是圓心，讓我好奇其他四心情況，尋找文獻後在第 51 屆全國科展國中組「運用之妙，存乎於心」中，作者將頂點放在半圓周，改變底邊兩點在直徑與其延長線上的相關位置，探討四心的參數式。這讓我想到如果將直角三角形的兩腰平方和為定值，改為一般三角形兩腰長的和、差、積、比為定值，我想探究四心的移動軌跡圖形又會有什麼樣的變化，於是開始了我的研究。

貳、研究目的

- 一、探討三角形兩腰和為定值時(橢圓)四心的性質。
- 二、探討三角形兩腰差為定值時(雙曲線)四心的性質。
- 三、探討三角形兩腰比為定值時(阿波羅尼斯圓)四心的性質。
- 四、探討三角形兩腰積為定值時(卡西尼卵形線)四心的性質。

參、研究設備與器材

GSP 數學軟體、GeoGebra、電腦、Microsoft Word、紙、筆、數學課本、**Wolfram Alpha**。

肆、文獻探討

一、先備知識

1. 三角形內心座標公式

若三角形三頂點座標分別為 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ， $C(x_3, y_3)$ ， $\overline{AB}=c$ ， $\overline{BC}=a$ ， $\overline{AC}=b$ ，

則內心座標為 $I\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$ 。

2. 三角形重心座標公式

若三角形三頂點座標分別為 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ， $C(x_3, y_3)$

則重心座標為 $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ 。

二、相關文獻探討

1. 第 49 屆全國科展高中組「凡走過必留下軌跡」中，五心的討論將三角形底邊分別放在圓切線、拋物線正焦弦、橢圓兩焦點連線、雙曲線兩焦點連線，與本研究不同。

2. 第 51 屆全國科展國中組「運用之妙，存乎於「心」」中，與本研究的異同之處如下：

(1) 文獻中五心的討論都將三角形第三點繞半圓，底邊兩點分成同時在圓內、一內一外、同時在圓外、直徑兩端四種情形來討論，我們將三角形第三點推廣到繞圓錐曲線來討論。。

(2) 文獻中先將底邊兩點座標分別設兩未知數(放 X 軸上)，使用未知數寫出五心座標參數式，我們則使用旋轉角 θ 所產生的頂點參數式去導出五心座標，進而求出軌跡方程式。

3. 第 52 屆全國科展高中組「“軌”謎“心”竅」，在圓錐曲線上取一動點，過中心或焦點取三相異直線討論其正射影三角形之性質以及其五心之軌跡與本研究變因不同。

4. 第 58 屆全國科展國中組「用心」使用三角形建構的旁心連線三角形、旁心三角形、及向外做的正三角形與五心之間的性質，與本研究不同。

三、圖片來源

本研究報告書內所有圖片為作者自繪。

伍、研究過程

一、探討三角形兩腰和為定值時(橢圓)四心的性質

(一)定義兩腰長的和為定值情形

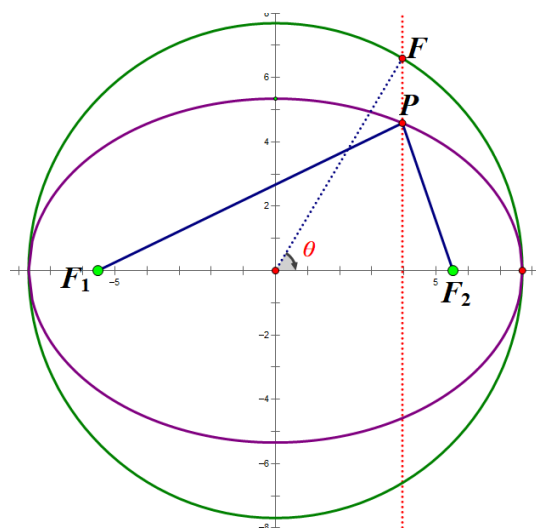
1.如圖(一)，在座標平面上，取長軸長為 a ，短軸長為 b ， F_1 、 F_2 兩點為橢圓焦點， P 為橢圓上之動點，連接 $\overline{PF_1}$ 、 $\overline{PF_2}$ ，探討 ΔPF_1F_2 中， $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ 為定值時，四心的性質。

2.取兩定點 F_1 、 F_2 座標為 $(-c, 0)$ ， $(c, 0)$ ，

在長軸圓上取 F 點逆時針旋轉 θ 角(有向角)作為橢圓

上動點 P 之控制點，可得 P 的參數式為：

$$P(a \cos \theta, b \sin \theta)$$



圖(一)

引理 1

可求得 ΔPF_1F_2 的三邊長： $\overline{PF_1} = a + c \cos \theta$ ， $\overline{PF_2} = a - c \cos \theta$ ， $\overline{F_1F_2} = 2c$ 。

[證明]

$$\begin{aligned} \overline{PF_1} &= \sqrt{(a \cos \theta + c)^2 + (b \sin \theta)^2} = \sqrt{(a \cos \theta)^2 + 2ac \cos \theta + c^2 + (b \sin \theta)^2} \\ &= \sqrt{(a \cos \theta)^2 + 2ac \cos \theta + c^2 + \sin^2 \theta (a^2 - c^2)} \\ &= \sqrt{a^2 + 2ac \cos \theta + (c \cos \theta)^2} = a + c \cos \theta \end{aligned}$$

同理， $\overline{PF_2} = \sqrt{(a \cos \theta - c)^2 + (b \sin \theta)^2} = a - c \cos \theta$ ，證明省略。

(二) 討論外心性質

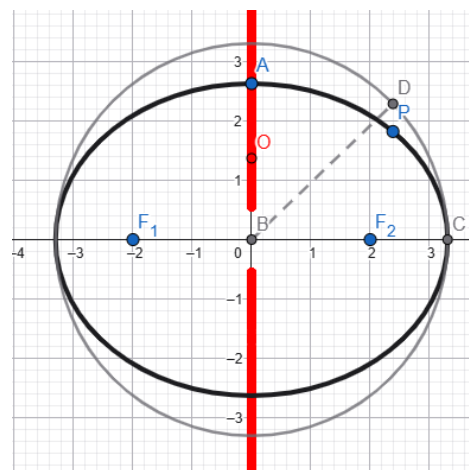
性質 1-1 外心的座標為 $O\left(0, \frac{b^2 - (c \sin \theta)^2}{2b \sin \theta}\right)$ 。

[證明]

如圖(二)， $F_1(-c, 0)$ ， $F_2(c, 0)$ ， $P(a \cos \theta, b \sin \theta)$

$\therefore m_{PF_2} = \frac{b \sin \theta}{a \cos \theta - c}$ ，取 P 、 F_2 中點 M ，令 O 為 ΔPF_1F_2 外心，

$$\Rightarrow m_{MO} = \frac{c - a \cos \theta}{b \sin \theta}，又 M\left(\frac{a \cos \theta + c}{2}, \frac{b \sin \theta}{2}\right)$$



圖(二)

由點斜式得直線方程為

$$y - \frac{b \sin \theta}{2} = \frac{c - a \cos \theta}{b \sin \theta} \left(x - \frac{a \cos \theta + c}{2} \right)$$

∵ 外心在 F_1 、 F_2 兩點中間， $x = 0$ 代入

$$\begin{aligned} \text{得 } y &= \frac{(a \cos \theta)^2 - c^2}{2b \sin \theta} + \frac{b \sin \theta}{2} = \frac{(a \cos \theta)^2 + (b \sin \theta)^2 - c^2}{2b \sin \theta} \\ &= \frac{-(a \sin \theta)^2 + b^2(1 + \sin^2 \theta)}{2b \sin \theta} = \frac{b^2 - (c \sin \theta)^2}{2b \sin \theta} \end{aligned}$$

可注意到外心的軌跡方程式包含於 $x = 0$ 的垂直線圖形中，並由 y 座標可知，當 θ 趨近於 0° 、 180° 及其同界角時，外心的 y 座標會趨近於正負無窮；當 θ 趨近於 $\pm 90^\circ$

及其同界角時，外心的 y 座標會在達到某一點時向反方向移動，該點座標為 $\left(0, \pm \frac{b^2 - c^2}{2b}\right)$ 。

說明：

當 θ 趨近於 0° 時， $\sin \theta$ 趨近於 0，則外心之座標為 $\left(0, \frac{b^2 - (c \sin \theta)^2}{2b \sin \theta}\right)$ ， y 座標分母趨近於 0 且分子趨近於 b^2 ，故其值趨近於無窮（正負由 $\sin \theta$ 決定）。

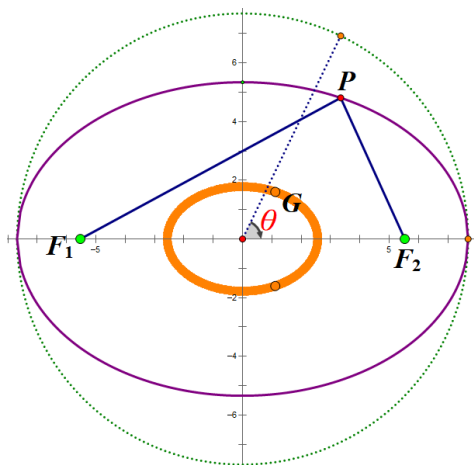
當 θ 為 90° 時，代入座標公式，外心座標為 $\left(0, \frac{b^2 - c^2}{2b}\right)$ 。當 θ 為 -90° 時，外心座標為

$$\left(0, -\frac{b^2 - c^2}{2b}\right)。$$

(三) 討論重心性質

性質 1-2 重心座標為 $G\left(\frac{a \cos \theta}{3}, \frac{b \sin \theta}{3}\right)$ 。

由重心座標可知，當動點 P 繞橢圓一周，重心所形成軌跡方程式為 $\frac{9x^2}{a^2} + \frac{9y^2}{b^2} = 1$ 。



圖(三)

(四)討論垂心性質

性質 1-3 垂心座標 $H(a \cos \theta, -\frac{(a \cos \theta)^2 - c^2}{b \sin \theta})$

[證明]

如圖(四)，由參數式得知垂心 x 座標為 $a \cos \theta$ ，

由 $\overrightarrow{F_2 P}$ 斜率得出直線 $L_{F_1 H}$ 的點斜式：

$$L_{F_1 H} : y = (x + c) \left(-\frac{a \cos \theta - c}{b \sin \theta} \right)$$

$\because \overrightarrow{PH} \perp \overrightarrow{F_1 F_2} \quad \therefore$ 垂心 H 的 x 座標與 P 相同

$$x = a \cos \theta \text{ 代入 } L_{F_1 H} \text{ 可得座標 } y = -\frac{(a \cos \theta)^2 - c^2}{b \sin \theta},$$

因此 $H(a \cos \theta, -\frac{(a \cos \theta)^2 - c^2}{b \sin \theta})$ ，證畢。

由垂心的座標，我們可推得垂心的軌跡方程式如下：

性質 1-4 垂心軌跡方程式為 $y^2 = \frac{(c^2 - x^2)^2}{b^2 - (\frac{b}{a}x)^2}$

[證明]

已知 $x = a \cos \theta$ ，則 $\cos \theta = \frac{x}{a}$ ，

$$\therefore y = -\frac{(a \cos \theta)^2 - c^2}{b \sin \theta} = -\frac{x^2 - c^2}{b \sin \theta},$$

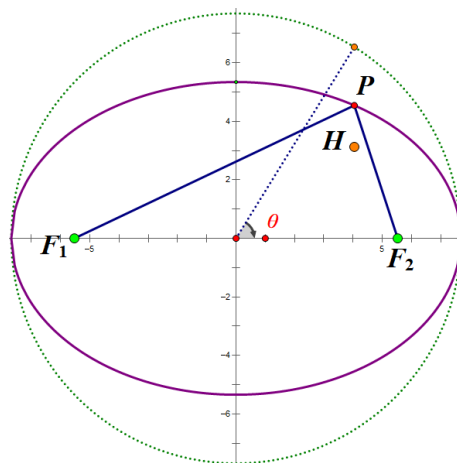
將等號兩邊同平方得

$$y^2 = \frac{(c^2 - x^2)^2}{b^2 \sin^2 \theta} = \frac{(c^2 - x^2)^2}{b^2 - (\frac{b}{a}x)^2}$$

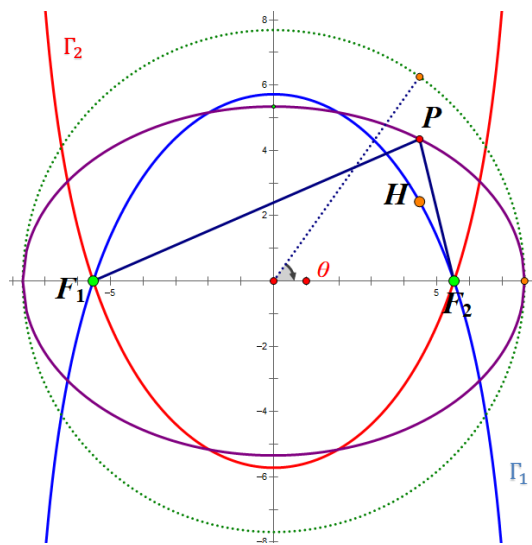
將上述推得方程式輸入 GSP 驗證可得右圖，

若 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ ，垂心軌跡為 Γ_1 ，

若 $180^\circ < \theta < 360^\circ$ ，垂心軌跡為 Γ_2 。



圖(四)



圖(五)

(五)討論內心性質

性質 1-5 內心座標為 $I\left(c \cos \theta, \frac{bc \sin \theta}{c+a}\right)$

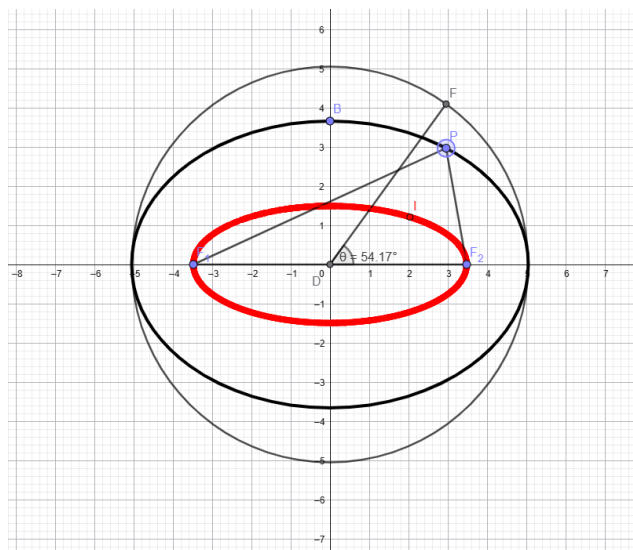
[證明]

由引理 1 及三角形內心座標公式得

$$\begin{aligned} x_I &= \frac{c(a+c \cos \theta)+2ca \cos \theta+(-c)(a-c \cos \theta)}{2c+2a} \\ &= \frac{c(a+c \cos \theta+2a \cos \theta-a+c \cos \theta)}{2(a+c)} \\ &= \frac{c(a+c)(\cos \theta)}{(a+c)} \\ &= c \cos \theta \end{aligned}$$

由三角形內心座標公式得

$$\begin{aligned} y_I &= \frac{2cb \sin \theta}{2c+2a} \\ &= \frac{bc \sin \theta}{c+a} \end{aligned}$$



圖(六)

性質 1-6 內心軌跡方程式為 $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{bc}{a+c}\right)^2} = 1$

[證明]

已知 $x = c \cos \theta$ ，則 $\cos \theta = \frac{x}{c}$ ，又 $y = \frac{bc \sin \theta}{c+a}$ ，則 $\sin \theta = \frac{(c+a)y}{bc}$

由平方關係式得 $\left(\frac{x}{c}\right)^2 + \left(\frac{(c+a)y}{bc}\right)^2 = 1$

則 $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{bc}{a+c}\right)^2} = 1$ ，證畢。

二、探討三角形兩腰長差為定值時(雙曲線)四心的性質

(一)定義兩腰長的差為定值情形

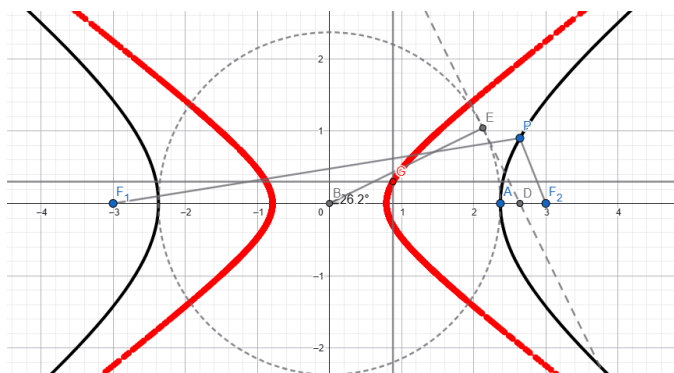
1. 在坐標平面上，到相異兩點 $F_1(-c, 0)$ 、 $F_2(c, 0)$ 的距離差的絕對值為 $2a$ (貫軸長) 的所有點所形成之雙曲線上，若取共軛軸長為 $2b$ ，在貫軸圓上取 E 點逆時針旋轉 θ 角 (有向角) 為雙曲線上動點 P 之控制點，可得 P 的參數式 $P(a \sec \theta, b \tan \theta)$ 。

(三)討論重心性質

性質 2-2 重心座標為 $G\left(\frac{a \sec \theta}{3}, \frac{b \tan \theta}{3}\right)$ 。

由重心座標可知，當動點 P 繞雙曲線一周，

重心所形成軌跡方程式為 $\frac{9x^2}{a^2} - \frac{9y^2}{b^2} = 1$ 。



圖(八)

(四)討論垂心性質

性質 2-3 垂心座標 $H(a \sec \theta, b \cot \theta - \frac{a^2}{b} \tan \theta)$

[證明]

如圖(九)，由參數式得知垂心 x 座標為 $a \sec \theta$ ，

由 $\overrightarrow{F_2P}$ 斜率得出直線 L_{F_1H} 的點斜式：

$$L_{F_1H} : y = (x + c) \left(-\frac{a \sec \theta - c}{b \tan \theta} \right)$$

$\because \overrightarrow{PH} \perp \overrightarrow{F_1F_2} \quad \therefore$ 垂心 H 的 x 座標與 P 相同

$x = a \sec \theta$ 代入 L_{F_1H} 可得座標 $y = b \cot \theta - \frac{a^2}{b} \tan \theta$ ，

因此 $H\left(a \sec \theta, b \cot \theta - \frac{a^2}{b} \tan \theta\right)$ ，證畢。

由垂心的座標，我們可推得垂心的軌跡方程式如下：

性質 2-4 垂心軌跡方程式為 $y^2 = \frac{(c^2 - x^2)^2}{\left(\frac{b}{a}x\right)^2 - b^2}$

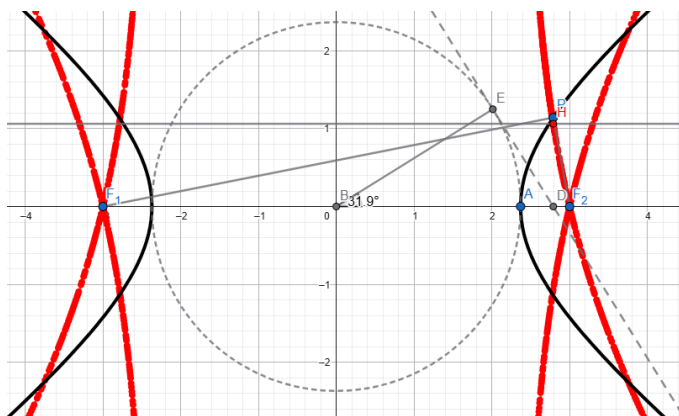
[證明]

已知 $x = a \sec \theta$ ，則 $\sec \theta = \frac{x}{a}$ ，

$$\because y = -\frac{(a \sec \theta)^2 - c^2}{b \tan \theta} = -\frac{x^2 - c^2}{b \tan \theta},$$

將等號兩邊同平方得

$$y^2 = \frac{(c^2 - x^2)^2}{b^2 \tan^2 \theta} = \frac{(c^2 - x^2)^2}{\left(\frac{b}{a}x\right)^2 - b^2}$$



圖(九)

(五)討論內心性質

性質 2-5 內心座標分為以下兩種

- (1) 當 $360^\circ n - 90^\circ < \theta < 360^\circ n + 90^\circ$ 時， $I\left(a, \frac{b \tan \theta}{1 + \sec \theta}\right)$ 。
- (2) 當 $360^\circ n + 90^\circ < \theta < 360^\circ n + 270^\circ$ 時， $I\left(-a, \frac{b \tan \theta}{1 - \sec \theta}\right)$ 。

[證明]

由引理 2 與三角形內心 x 座標公式得

$$x_I = \frac{c|c \sec \theta + a| + 2c \cdot a \sec \theta + (-c)|c \sec \theta - a|}{2c + |c \sec \theta + a| + |c \sec \theta - a|}$$

因 $\sec \theta$ 落在 $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ ，分二種情形討論

(i) $c \sec \theta > a > 0$ ，即 $360^\circ n - 90^\circ < \theta < 360^\circ n + 90^\circ$ ， n 為整數

$$\text{則 } x_I = \frac{c(a + c \sec \theta) + 2ca \sec \theta - c(c \sec \theta - a)}{2c(\sec \theta + 1)} = \frac{2ac(1 + \sec \theta)}{2c(1 + \sec \theta)} = a$$

(ii) $c \sec \theta < 0$ ，即 $360^\circ n + 90^\circ < \theta < 360^\circ n + 270^\circ$ ， n 為整數

$$\text{則 } x_I = \frac{c(-c \sec \theta - a) + 2ac \sec \theta - c(-c \sec \theta + a)}{2c - c \sec \theta - a - c \sec \theta + a} = \frac{2ac(-1 + \sec \theta)}{2c(1 - \sec \theta)} = -a$$

三角形內心 y 座標

$$y_I = \frac{2cb \tan \theta}{2c + |c \sec \theta + a| + |c \sec \theta - a|} \quad , \text{ 同理}$$

$$\text{當 } 360^\circ n - 90^\circ < \theta < 360^\circ n + 90^\circ, y_I = \frac{b \tan \theta}{1 + \sec \theta}$$

$$\text{當 } 360^\circ n + 90^\circ < \theta < 360^\circ n + 270^\circ, y_I = \frac{b \tan \theta}{1 - \sec \theta}$$

注意到內心的 y 座標存在極值，該極值為 $\pm b$

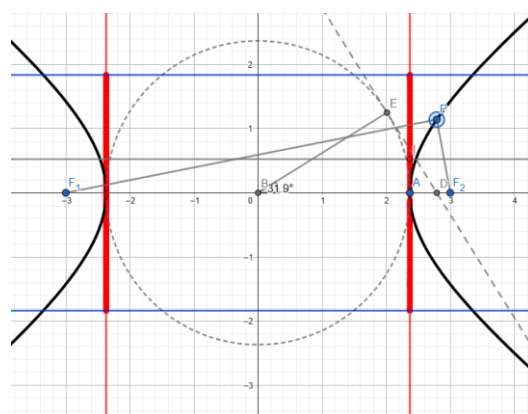
[證明]

以 $360^\circ n - 90^\circ < \theta < 360^\circ n + 90^\circ$ 為例，

$\theta \rightarrow 90^\circ$ 時，

$$y = \lim_{\theta \rightarrow 90^\circ} \frac{b \tan \theta}{1 + \sec \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 90^\circ} \frac{b \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{\cos \theta + 1}{\cos \theta}} = \lim_{\theta \rightarrow 90^\circ} \frac{b \sin \theta}{\cos \theta + 1} = \frac{b \times 1}{0 + 1} = b$$

$$\theta \rightarrow -90^\circ \text{時}, y = \lim_{\theta \rightarrow -90^\circ} \frac{b \tan \theta}{1 - \sec \theta} = \lim_{\theta \rightarrow -90^\circ} \frac{b \sin \theta}{\cos \theta - 1} = \frac{b \times 1}{0 - 1} = -b$$



圖(十)

三、探討三角形兩腰比為定值時（阿波羅尼斯圓）四心的性質

(一)定義兩腰長的比為定值情形

如圖(十一)，在坐標平面上給定兩定點 F_1 、 F_2 ，兩點固定在 $(-c, 0)$ ， $(c, 0)$ ，定義一動點 P ，滿足 $\frac{\overline{PF_2}}{\overline{PF_1}} = k$ ，其中 k 為定值，不失一般性令 $k > 1$ ，則滿足此條件之動點 P 其軌跡所成的圓為阿波羅圓， F_1 、 F_2 兩點分別位於該圓的內部和外部，

其圓標準式如下： $\left(x + \frac{c(k^2+1)}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2ck}{k^2-1}\right)^2$

[證明]

已知 $\frac{\overline{PF_2}}{\overline{PF_1}} = k$ ，移項後等號兩邊同平方得 $\overline{PF_2}^2 = k^2 \overline{PF_1}^2$ ，由兩點距離公式

$(x+c)^2 + y^2 = k^2[(x-c)^2 + y^2]$ ，展開後移項整理得

$$(k^2 - 1)x^2 + (k^2 - 1)y^2 + (2k^2c + 2c)x + (k^2c^2 - c^2) = 0$$

同除 $(k^2 - 1)$ 再對 x 配方

$$\left(x + \frac{c(k^2+1)}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{c(k^2+1)}{k^2-1}\right)^2 - c^2$$

整理後得

$$\left(x + \frac{c(k^2+1)}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2ck}{k^2-1}\right)^2, \text{ 證畢。}$$

令 P 為阿波羅圓上動點

$$\angle POF_1 = \theta,$$

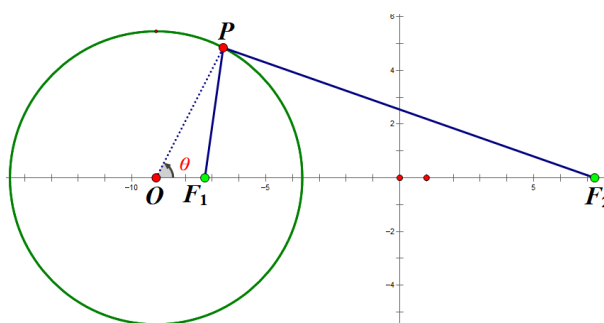
由上圓標準式可得其上動點 P 的坐標參數式為：

$$\begin{cases} x = \frac{-c(k^2+1)}{k^2-1} + \frac{2ck}{k^2-1} \cos \theta \\ y = \frac{2ck}{k^2-1} \sin \theta \end{cases}$$

接著可求得 $\triangle PF_1F_2$ 邊長：

引理 3

$$\overline{PF_1} = \frac{2c\sqrt{k^2-2k\cos\theta+1}}{k^2-1}, \overline{PF_2} = \frac{2ck\sqrt{k^2-2k\cos\theta+1}}{k^2-1}, \overline{F_1F_2} = 2c.$$



圖(十一)

[證明]

由兩點距離公式

$$\begin{aligned}\overline{PF_1} &= \sqrt{\left(\frac{-c(k^2+1)+2ck\cos\theta+c(k^2-1)}{k^2-1}\right)^2 + \left(\frac{2ck\sin\theta}{k^2-1}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{4c^2(k^2\cos^2\theta-2k\cos\theta+1+k\sin^2\theta)}{(k^2-1)^2}} \\ &= \frac{2c\sqrt{k^2-2k\cos\theta+1}}{k^2-1}\end{aligned}$$

$$\text{同理，}\overline{PF_2} = \sqrt{\left(\frac{-c(k^2+1)+2ck\cos\theta-c(k^2-1)}{k^2-1}\right)^2 + \left(\frac{2ck\sin\theta}{k^2-1}\right)^2} = \frac{2c\sqrt{k^2-2k\cos\theta+1}}{k^2-1}, \text{證明省略}$$

(二) 討論外心性質

性質 3-1 外心的座標為 $O\left(0, \frac{2ck-c\cos\theta(k^2+1)}{\sin\theta(k^2-1)}\right)$ 。

[證明]

如圖(十二)， $F_1(-c, 0)$ ， $F_2(c, 0)$ ， $P\left(-\frac{c(k^2+1)}{k^2-1} + \frac{2ck}{k^2-1}\cos\theta, \frac{2ck}{k^2-1}\sin\theta\right)$

$\because m_{PF_1} = \frac{k\sin\theta}{k\cos\theta-1}$ ，取 P 、 F_1 中點 M ，令 O 為 $\triangle PF_2F_1$ 外心，

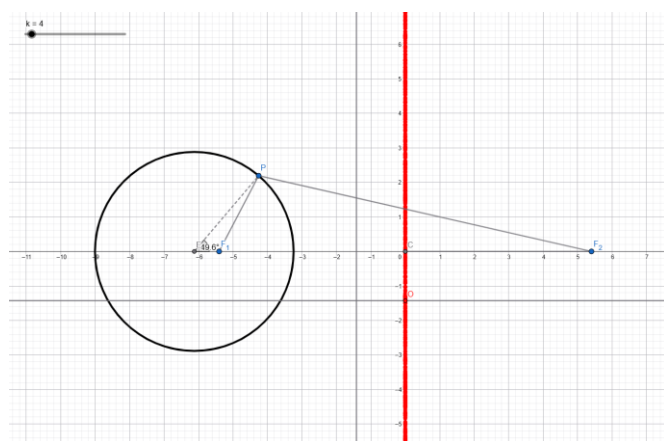
$$\Rightarrow m_{MO} = \frac{-k\cos\theta+1}{k\sin\theta}, \text{又 } M\left(\frac{-ck(k-\cos\theta)}{k^2-1}, \frac{ck\sin\theta}{k^2-1}\right)$$

由點斜式得直線方程為

$$y - \frac{ck\sin\theta}{k^2-1} = \left(\frac{-k\cos\theta+1}{k\sin\theta}\right)\left(x - \frac{-ck(k-\cos\theta)}{k^2-1}\right)$$

$\because$ 外心在 F_1 、 F_2 兩點中間， $x=0$ 代入

$$\begin{aligned}\text{得 } y &= \frac{(-k\cos\theta+1)(ck-c\cos\theta)+ck\sin^2\theta}{(k\sin\theta)(k^2-1)} \\ &= \frac{-ck^2\cos\theta+ck\cos^2\theta+ck-c\cos\theta+ck\sin^2\theta}{(k\sin\theta)(k^2-1)} \\ &= \frac{2ck-c\cos\theta(k^2+1)}{\sin\theta(k^2-1)}\end{aligned}$$



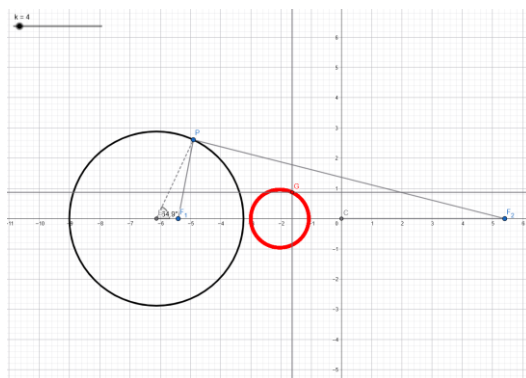
圖(十二)

(三)討論重心性質

性質 3-2 重心座標為 $G\left(\frac{-c(k^2+1)+2ck \cos \theta}{3(k^2-1)}, \frac{2ck \sin \theta}{3(k^2-1)}\right)$ 。

由重心座標可知，當動點 P 繞圓一周，重心所形成軌

跡方程式為 $\left(x + \frac{c(k^2+1)}{3(k^2-1)}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2ck}{3(k^2-1)}\right)^2$ 。



圖(十三)

(四)討論垂心性質

性質 3-3 垂心座標 $H\left(\frac{-c(k^2+1)+2ck \cos \theta}{k^2-1}, \frac{2ck^2 \cos \theta - 2ck \cos^2 \theta + 2c \cos \theta - 2ck}{(k^2-1) \sin \theta}\right)$

[證明]

如圖(十四)，由 P 點參數式得知垂心 x 座標同為 $\frac{-c(k^2+1)+2ck \cos \theta}{k^2-1}$ ，

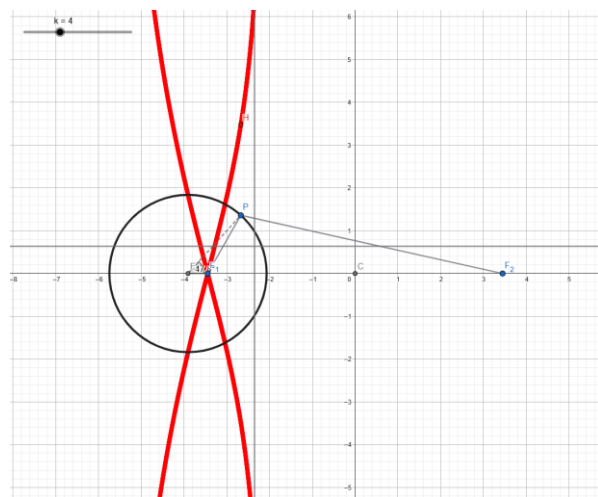
由 $\overrightarrow{F_2P}$ 斜率得出直線 L_{F_1H} 的點斜式：

$$y = \left(\frac{-k \cos \theta + 1}{k \sin \theta}\right)(x - c)$$

$\because \overrightarrow{PH} \perp \overrightarrow{F_1F_2} \quad \therefore$ 垂心 H 的 x 座標與 P 相同

$$x = \frac{-c(k^2+1)+2ck \cos \theta}{k^2-1} \text{ 帶入}$$

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{-k \cos \theta + 1}{k \sin \theta}\right) \left(\frac{-c(k^2+1)+2ck \cos \theta}{k^2-1} - c\right) \\ &= \frac{2ck^2 \cos \theta - 2ck \cos^2 \theta + 2c \cos \theta - 2ck}{(k^2-1) \sin \theta} \end{aligned}$$



圖(十四)

由垂心的座標，我們可推得垂心的軌跡方程式如下：

$$y^2 = \frac{(k^2-1)(c^2-x^2)^2}{(c-x)^2 - k^2(c+x)^2}$$

[證明]

$$\text{已知 } x = \frac{-c(k^2+1)+2ck \cos \theta}{k^2-1}, \text{ 則 } \cos \theta = \frac{(k^2-1)x + c(k^2+1)}{2ck}$$

$$\text{則 } y = \frac{2ck^2(k^2x - x + ck^2 + c) - (k^2x - x + ck^2 + c)^2 + 2c(k^2x - x + ck^2 + c) - 4c^2k^2}{2ck(k^2-1) \sin \theta}$$

簡化後得

$$y = \frac{(k^2-1)(c^2-x^2)}{2ck \sin \theta}$$

將等號兩邊同平方

$$\begin{aligned}
y^2 &= \frac{(k^2-1)^2(c^2-x^2)^2}{4c^2k^2-[(k^2-1)x+c(k^2+1)]^2} \\
&= \frac{(k^2-1)^2(c^2-x^2)^2}{(2ck+k^2x-x+ck^2+c)(2ck-k^2x+x-ck^2-c)} \\
&= \frac{(k^2-1)^2(c^2-x^2)^2}{(k+1)[(c-x)+(ck+kx)](k-1)[(c-x)-(ck+kx)]} \\
&= \frac{(k^2-1)(c^2-x^2)^2}{(c-x)^2-k^2(c+x)^2}
\end{aligned}$$

(五)討論內心性質

性質 3-4 令 $m = \sqrt{k^2 - 2k \cos \theta + 1}$ ，則內心座標為 $I\left(\frac{-cm}{k+1}, \frac{2ck \sin \theta}{(k+1)(k-1+m)}\right)$ 。

[證明]

由引理 3 與三角形內心座標公式得

$$\begin{aligned}
x_I &= \frac{\frac{-c(k^2+1)+2ck \cos \theta}{k^2-1} \times 2c + c \times \frac{2cm}{k^2-1} - c \times \frac{2ckm}{k^2-1}}{2c+2cm(k+1)} \\
&= \frac{-ck^2-c+2ck \cos \theta + cm - ckm}{k^2-1+m(k+1)} \\
&= \frac{-c(m^2-m+km)}{(k+1)(m+k-1)} = \frac{-cm}{k+1} \\
y_I &= \frac{\frac{2ck}{k^2-1} \sin \theta \times 2c}{2c + \frac{2cm(k+1)}{k^2-1}} \\
&= \frac{2ck \sin \theta}{k^2-1+m(k+1)} \\
&= \frac{2ck \sin \theta}{(k+1)(k-1+m)}
\end{aligned}$$

性質 3-5 內心軌跡為 $\frac{x^2+y^2-c^2}{x^2-y^2-c^2} = \frac{c(1-k)}{x(1+k)}$ 的部分圖形。

[證明]

已知 $x = \frac{-cm}{k+1}$ ，則 $m = \frac{k+1}{-c}x$, $\cos \theta = \frac{x^2(k+1)^2-c^2k^2}{-2c^2k}$

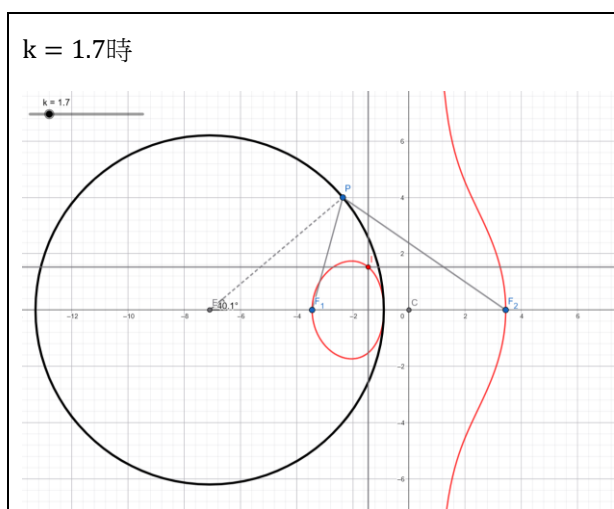
$y = \frac{2ck \sin \theta}{(k+1)(k-1+\frac{k+1}{-c})}$ ，等號兩邊同平方得

$$y^2 = \frac{4c^4k^2-4c^4k^2 \times \left(\frac{[(k+1)^2x^2-c^2(k-1)^2]^2}{4c^4k^2}\right)}{(k+1)^2[c(k-1)-x(k+1)]^2}$$

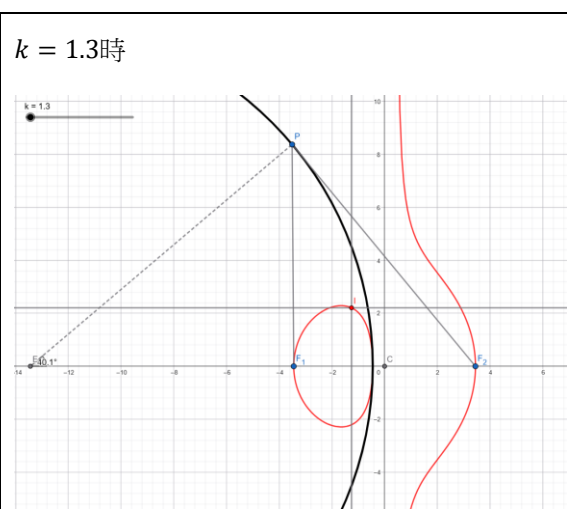
$$\begin{aligned}
&= \frac{(k+1)^2 [2c^2 k + (k+1)^2 x^2 - c^2 (k^2 + 1)] \left(\frac{2c^2 k + c^2 (k^2 + 1)}{(k+1)^2} - x^2 \right)}{(k+1)^2 [c(k-1) - x(k+1)]^2} \\
&= \frac{(c^2 - x^2) [x(k+1) - c(k-1)] [x(k+1) + c(k-1)]}{[x(k-1) - c(k+1)]^2} \\
&= \frac{(c^2 - x^2) [x(k+1) + c(k-1)]}{x(k+1) - c(k-1)}, \text{ 經整理後可得 } \frac{x^2 + y^2 - c^2}{x^2 - y^2 - c^2} = \frac{c(1-k)}{x(1+k)}
\end{aligned}$$

討論：

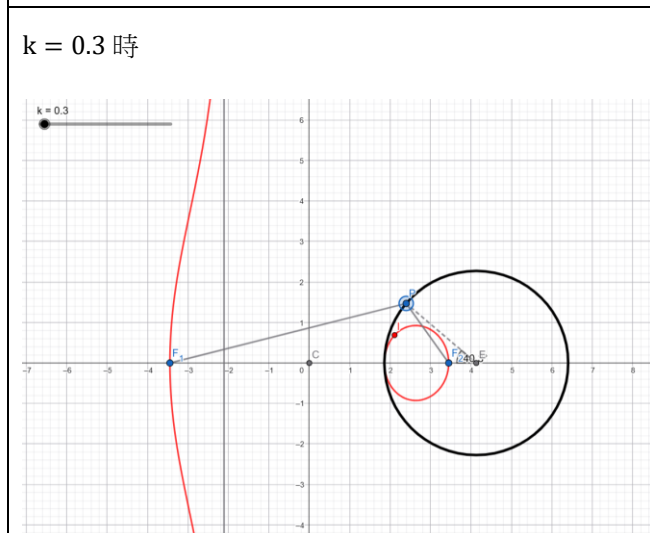
如圖(十五)~(十八)，此圖形在 $k > 1$ 時，內心軌跡為內切於阿波羅圓的封閉曲線，在 k 越來越接近1時，封閉曲線接近 y 軸的一端會被拉長；而在 $0 < k < 1$ 時，圖形會以 y 軸為對稱軸鏡射（阿波羅圓亦同）；在 $k = 1$ 時，阿波羅圓退化成直線，內心軌跡則會退化成圓。



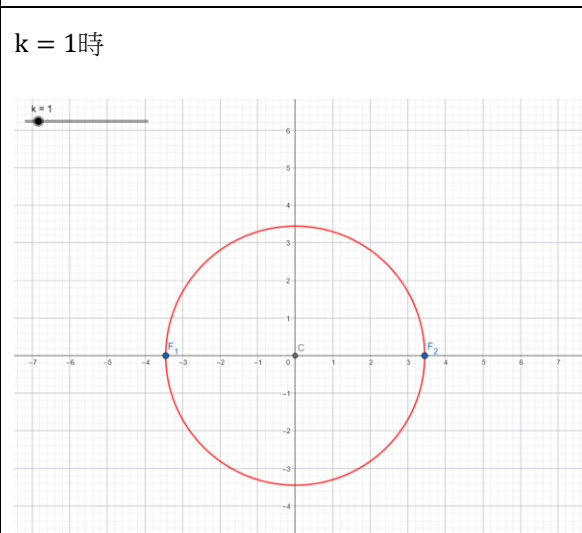
圖(十五)



圖(十六)



圖(十七)



圖(十八)

四、探討三角形兩腰積為定值時（卡西尼卵形線）四心的性質

(一)定義兩腰長的積為定值情形

如圖(十九)~(二十一)，在坐標平面上，取兩腰積 k^2 ，將 F_1 、 F_2 兩點固定在兩端點 $(-c, 0)$ ，

$(c, 0)$ ，定義一點 P 使得 $\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2} = k^2$ ，滿足此關係的所有 P 點所成圖形即為卡西尼卵形

線，該圖形在 $\frac{k}{c} > 1$ 時為一閉曲線；在 $\frac{k}{c} < 1$ 時為兩條不相連的閉曲線；在 $\frac{k}{c} = 1$ 時則為有名的

伯努力雙紐線。由文獻探討得知卡西尼卵形線上動點 P 參數式，過程如下：

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = k^2$$

兩邊平方：
$$[(x-c)^2 + y^2][(x+c)^2 + y^2] = k^4$$

展開可得直角坐標方程：
$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = k^4 - c^4$$

為了推導參數式，先將其轉換為極座標 $x = r \cos \theta$ ， $y = r \sin \theta$

$\because x^2 + y^2 = r^2$ ， $x^2 - y^2 = r^2 \cos 2\theta$ 代入直角坐標方程

可得 $r^4 - 2c^2 r^2 \cos 2\theta + (c^4 - k^4) = 0$ ，由一元二次方程式求根公式得

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{2c^2 \cos 2\theta \pm \sqrt{(-2c^2 \cos 2\theta)^2 - 4(c^4 - k^4)}}{2} \\ &= \frac{2c^2 \cos 2\theta \pm \sqrt{4c^4 \cos^2 2\theta - 4c^4 + 4k^4}}{2} \\ &= c^2 \cos 2\theta \pm \sqrt{k^4 - c^4 \sin^2 2\theta} \end{aligned}$$

則 $r = \sqrt{c^2 \cos 2\theta \pm \sqrt{k^4 - c^4 \sin^2 2\theta}}$

將 r 表達式代入可得卡西尼卵形線參數式 P ：

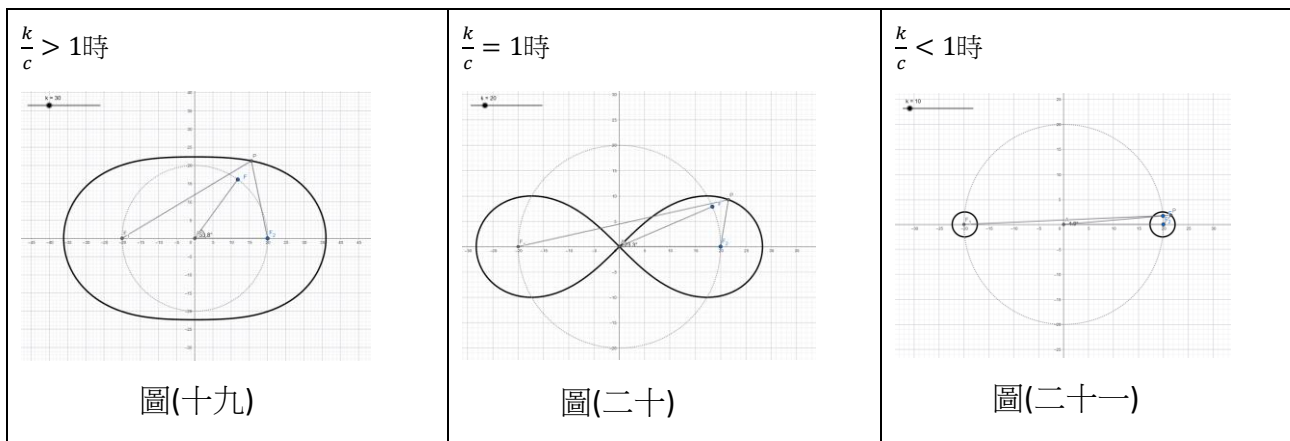
$$\begin{cases} x = \cos \theta \sqrt{c^2 \cos 2\theta \pm \sqrt{k^4 - c^4 \sin^2 2\theta}} \\ y = \sin \theta \sqrt{c^2 \cos 2\theta \pm \sqrt{k^4 - c^4 \sin^2 2\theta}} \end{cases}$$

當 $\frac{k}{c} > 1$ 時，根號內取正號，圖形是一個封閉的單一環，

$\frac{k}{c} = 1$ 時，圖形變成雙紐線 (Lemniscate)，

$\frac{k}{c} < 1$ 時，圖形會分裂成兩個獨立的封閉曲線

以下為我們藉由文獻推導出的參數式所繪製的圖形：



接著可求得 ΔPF_1F_2 邊長：

[引理 4] 以 $\frac{k}{c} > 1$ 時為例，

$$r(\theta) = \sqrt{c^2 \cos 2\theta + \sqrt{k^4 - c^4} \sin^2 2\theta}$$

$$\overline{PF_1} = \sqrt{r^2(\theta) + 2cr(\theta) \cos \theta + c^2},$$

$$\overline{PF_2} = \sqrt{r^2(\theta) - 2cr(\theta) \cos \theta + c^2},$$

$$\overline{F_1F_2} = 2c.$$

[證明]

由兩點距離公式

$$\begin{aligned} \overline{PF_1} &= \sqrt{(c \cos \theta + r(\theta))^2 + (r(\theta) \sin \theta)^2} \\ &= \sqrt{r^2(\theta) + 2cr(\theta) \cos \theta + c^2} \end{aligned}$$

同理， $\overline{PF_2} = \sqrt{(c \cos \theta - r(\theta))^2 + (r(\theta) \sin \theta)^2} = \sqrt{r^2(\theta) - 2cr(\theta) \cos \theta + c^2}$ ，證明省略。

(二) 討論外心性質

[性質 4-1] 外心的座標為 $O\left(0, \frac{r^2(\theta) - c^2}{2r(\theta) \sin \theta}\right)$ 。

[證明]

如圖(二十二)， $F_1(-c, 0)$ ， $F_2(c, 0)$ ， $P(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)$

$\therefore m_{PF_1} = \frac{r(\theta) \sin \theta}{r(\theta) \cos \theta + c}$ ，取 P 、 F_1 中點 M ，令 O 為 ΔPF_2F_1 外心，

(四)討論垂心性質

性質 4-3 垂心座標 $H(r(\theta) \cos \theta, \frac{c^2 - r^2(\theta) \cos^2 \theta}{r(\theta) \sin \theta})$

[證明]

如圖(二十四)，[由 $\overrightarrow{F_2P}$ 斜率得出直線 L_{F_1H} 的點斜式：

$$y = \left(-\frac{r(\theta) \cos \theta + c}{r(\theta) \sin \theta} \right) (x - c)$$

$\because \overrightarrow{PH} \perp \overrightarrow{F_1F_2} \quad \therefore$ 垂心 H 的 x 座標與 P 相同

$x = r(\theta) \cos \theta$ 帶入

$$\begin{aligned} y &= \left(-\frac{r(\theta) \cos \theta + c}{r(\theta) \sin \theta} \right) (r(\theta) \cos \theta - c) \\ &= \frac{c^2 - r^2(\theta) \cos^2 \theta}{r(\theta) \sin \theta} \end{aligned}$$

由垂心的座標，我們可推得垂心的軌跡方程式如下： $\left[\left(\frac{x^2 - c^2}{y} \right)^2 + x^2 + c^2 \right]^2 = k^4 + 4c^2 x^2$

[證明]

令 $t = \tan \theta, x = r(\theta) \cos \theta$

$$\Rightarrow \cos 2\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \cos^2 \theta = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow x^2 = \left[c^2 \frac{1-t^2}{1+t^2} + \sqrt{k^4 - c^4 \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^2} \right] \frac{1}{1+t^2}$$

$$\text{又 } y = \frac{c^2 - x^2}{r(\theta) \sin \theta}, \text{ 則 } r(\theta) \sin \theta = \frac{c^2 - x^2}{y}$$

$$\text{又 } x = r(\theta) \cos \theta, \text{ 則 } t = \frac{c^2 - x^2}{xy}$$

$$\Rightarrow (1+t^2)x^2 = c^2 \frac{1-t^2}{1+t^2} + \sqrt{k^4 - c^4 \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(1+t^2)^2 x^2 - c^2(1-t^2)}{1+t^2} = \sqrt{k^4 - c^4 \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^2}$$

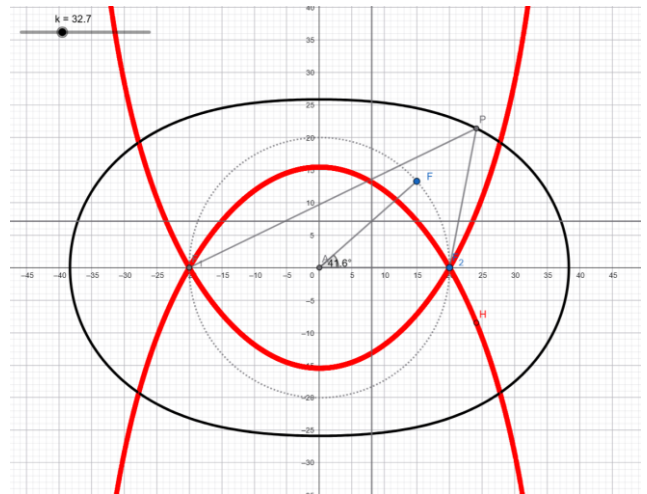
$$\Rightarrow \frac{[(1+t^2)^2 x^2 - c^2(1-t^2)]^2}{(1+t^2)^2} = k^4 - c^4 \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^2$$

$$\Rightarrow [(1+t^2)^2 x^2 - c^2(1-t^2)]^2 = k^4(1+t^2)^2 - c^4(2t)^2$$

$$\Rightarrow (1+t^2)^4 x^4 - 2c^2 x^2 (1+t^2)^2 (1-t^2) + c^4(1-t^2)^2 = k^4(1+t^2)^2 - c^4(2t)^2$$

$$\Rightarrow (1+t^2)^2 x^4 - 2c^2 x^2 (1-t^2) - k^4 + c^4 = 0$$

$$\Rightarrow (1+t^2)^2 x^4 - 2c^2 x^2 (1+t^2) + c^4 + 4c^2 x^2 t^2 = k^4$$



圖(二十四)

$$\Rightarrow (1+t^2)^2 x^4 - 2c^2 x^2(1+t^2) + c^4 + (2cxt)^2 = k^4$$

$$\text{又 } t = \frac{c^2 - x^2}{xy}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{(xy)^2 + (c^2 - x^2)^2}{y^2} - c^2 \right]^2 + \left(2c \cdot \frac{c^2 - x^2}{y} \right)^2 = k^4$$

$$\Rightarrow [y^2(x^2 - c^2) + (x^2 - c^2)^2]^2 + 4c^2 y^2 (c^2 - x^2)^2 = (ky)^4$$

$$\Rightarrow (x^2 - c^2)^2 (y^2 + x^2 - c^2)^2 + 4c^2 y^2 (c^2 - x^2)^2 = (ky)^4$$

$$\Rightarrow (x^2 - c^2)^2 [(y^2 + x^2 - c^2)^2 + 4c^2 y^2] = (ky)^4$$

$$\Rightarrow (x^2 - c^2)^2 [(y^2 + x^2 + c^2)^2 + 4c^2 x^2] = (ky)^4$$

$$\Rightarrow (x+c)^2 (x-c)^2 [(x+c)^2 + y^2][(x-c)^2 + y^2] = (ky)^4$$

$$\Rightarrow [(x+c)^2 (x-c)^2 + y^2 (x-c)^2][(x+c)^2 (x-c)^2 + y^2 (x+c)^2] = (ky)^4$$

$$\Rightarrow (x^2 - c^2)^4 + (x^2 - c^2)^2 [2y^2 (x^2 + c^2)] + (x^2 + c^2)^2 y^4 = (ky)^4$$

等號兩邊同加 $4c^2 x^2 y^4$

$$\Rightarrow [(x^2 - c^2)^2 + (x^2 + c^2)y^2]^2 = y^4 (k^4 + 4c^2 x^2)$$

等號兩邊同除 y^4

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{x^2 - c^2}{y} \right)^2 + x^2 + c^2 \right]^2 = k^4 + 4c^2 x^2, \text{ 得證。}$$

(五)討論內心性質

性質 4-4 內心座標為 $I \left(\frac{c\sqrt{2(r^2+c^2-k^2)}+2cr \cos \theta}{\sqrt{2(r^2+c^2+k^2)}+2c}, \frac{2cr \sin \theta}{\sqrt{2(r^2+c^2+k^2)}+2c} \right)$ 。

[證明]

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \sqrt{2(r^2 + c^2 + k^2)}; \overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \sqrt{2(r^2 + c^2 - k^2)}$$

說明：

$$\text{由引理 4 得 } \overline{PF_1}^2 + \overline{PF_2}^2 = 2(r^2 + c^2)$$

$$\text{又由卡西尼卵形線定義：} \overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2} = k^2$$

故由和平方公式及差平方公式得證。

則由三角形內心座標公式得

$$x_I = \frac{c \cdot \overline{PF_1} - c \cdot \overline{PF_2} + 2cr \cos \theta}{\sqrt{2(r^2 + c^2 + k^2)} + 2c}$$

$$= \frac{c\sqrt{2(r^2 + c^2 - k^2)} + 2cr \cos \theta}{\sqrt{2(r^2 + c^2 + k^2)} + 2c}$$

$$y_I = \frac{2cr \sin \theta}{\sqrt{2(r^2 + c^2 + k^2)} + 2c}$$

性質 4-5 內心軌跡為 $\frac{\sqrt{k^4 - (r^2 - c^2)^2}}{\sqrt{(r^2 + c^2)^2 - k^4} + 2c^2} = \frac{2y(x+c)}{(x+c)^2 - y^2}$ 。

[證明]

$$1. \because \overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2} = k^2$$

$$\Rightarrow (r^2 + c^2)^2 - (2rc \cos \theta)^2 = k^4$$

$$\Rightarrow r^4 + c^4 + 2r^2c^2 - 4r^2c^2(\cos \theta)^2 = k^4$$

$$\Rightarrow r^4 + c^4 + 2r^2c^2(1 - 2(\cos \theta)^2) = k^4$$

$$\Rightarrow r^4 + c^4 - 2r^2c^2 \cos 2\theta = k^4$$

$$\Rightarrow \cos 2\theta = \frac{r^4 + c^4 - k^4}{2r^2c^2}$$

$$\text{由此可得} (\tan \theta)^2 = \frac{k^4 - (r^2 - c^2)^2}{(r^2 + c^2)^2 - k^4}$$

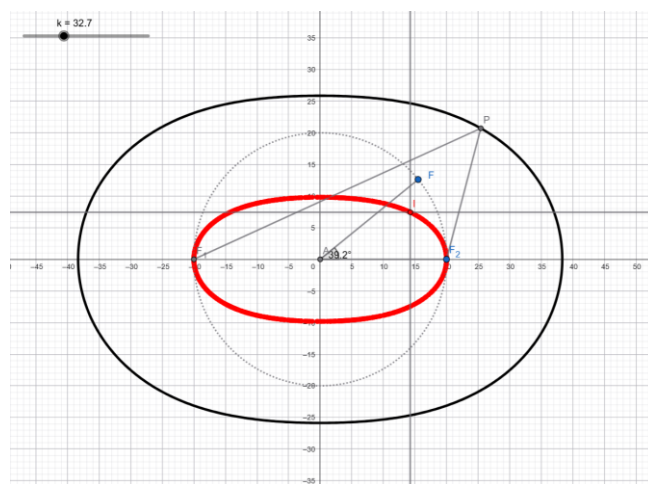
$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{k^4 - (r^2 - c^2)^2}}{2rc}, \cos \theta = \frac{\sqrt{(r^2 + c^2)^2 - k^4}}{2rc} \dots\dots ①$$

2. 如右圖，令 $\angle PF_1F_2 = 2\alpha$ ，內心縱座標為 x ，橫坐標為 y ， $\overline{OP} = r$

$$\text{可得} \tan \alpha = \frac{y}{x+c}, \tan 2\alpha = \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta + c} = \frac{2\left(\frac{y}{x+c}\right)}{1 - \left(\frac{y}{x+c}\right)^2} = \frac{2yc}{(x+c)^2 - y^2} \dots\dots ②$$

將第①式代入第②式

$$\text{可得} \frac{\sqrt{k^4 - (r^2 - c^2)^2}}{\sqrt{(r^2 + c^2)^2 - k^4} + 2c^2} = \frac{2y(x+c)}{(x+c)^2 - y^2}$$

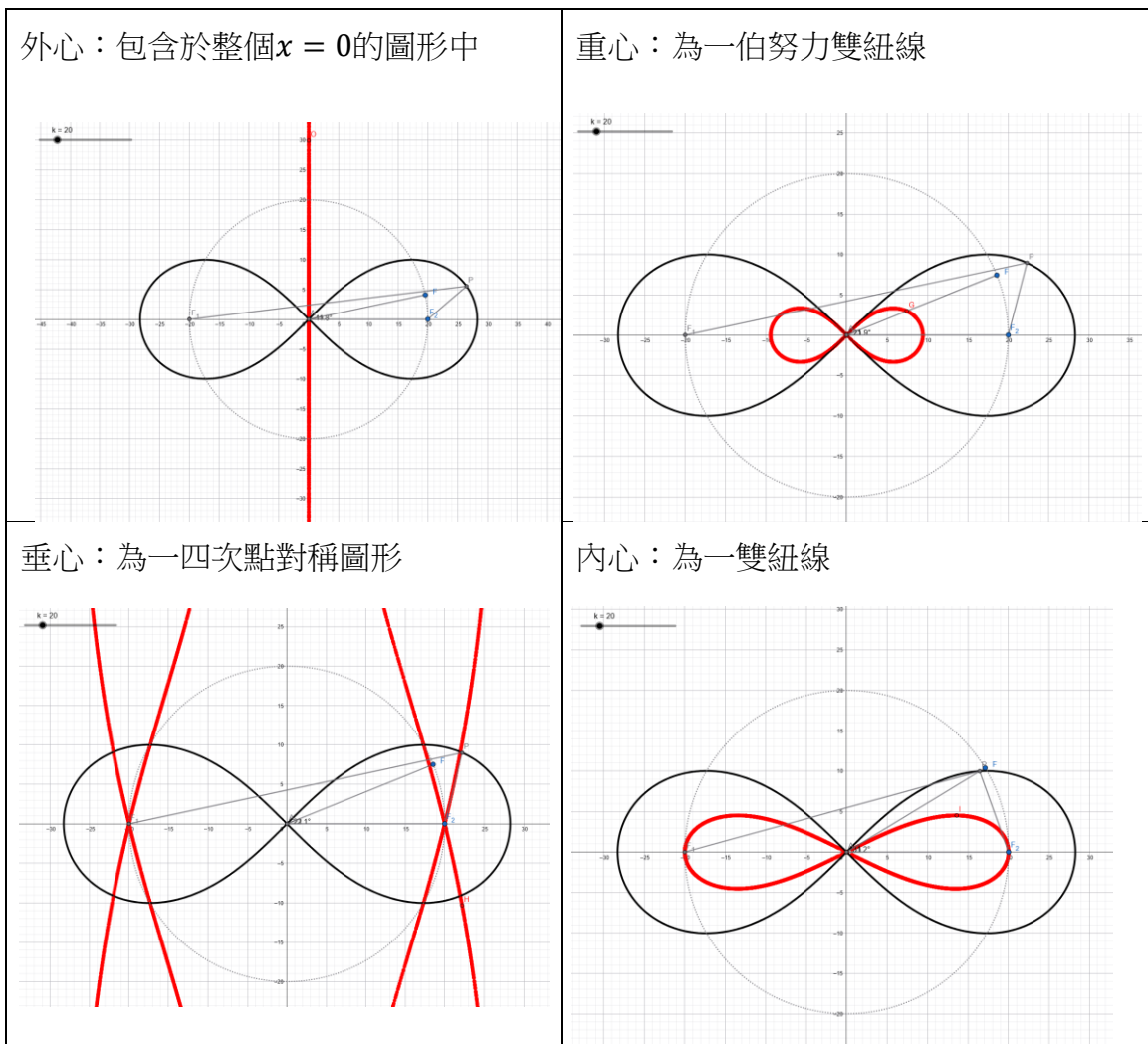


圖(二十五)

陸、討論

一、探討卡西尼卵形線在 $\frac{k}{c} = 1$ 時，四心座標及軌跡：

(一) $\frac{k}{c} = 1$ 時之四心軌跡圖形



1. 在 $\frac{k}{c} = 1$ 時， $r(\theta) = c\sqrt{2\cos 2\theta}$ ，將 $r(\theta)$ 帶入 $\frac{k}{c} > 1$ 時的座標，即為此時的四心座標，與 $\frac{k}{c} > 1$ 時座標相同。
2. 在 $\frac{k}{c} = 1$ 時，四心軌跡同 $\frac{k}{c} > 1$ 時的方程式。

二、探討卡西尼卵形線在 $\frac{k}{c} < 1$ 時，四心座標及軌跡：

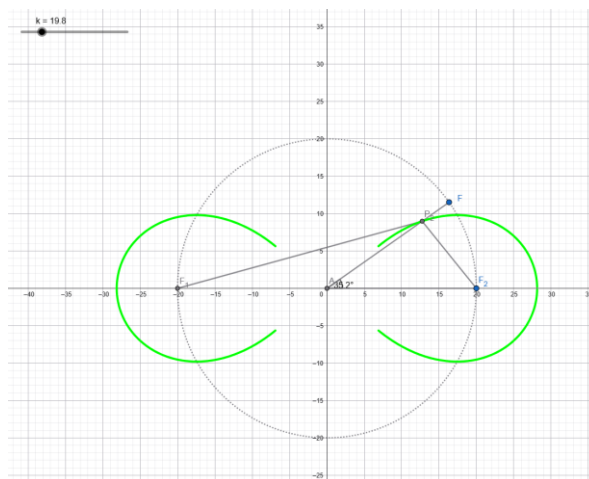
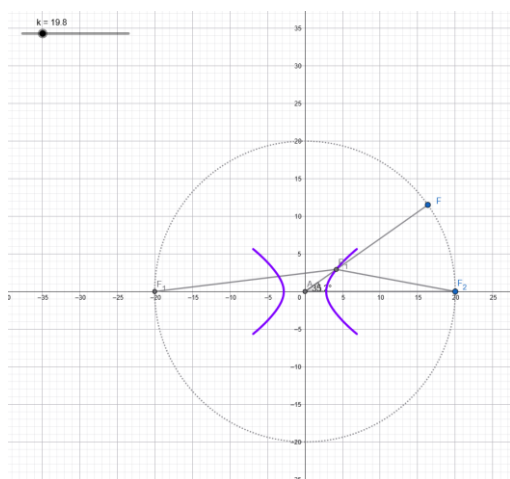
(一) 在 $\frac{k}{c} < 1$ 時，參數式中需取正號與負號，且對 θ 的大小亦有限制： $-\frac{\sin^{-1}\left(\frac{k}{c}\right)^2}{2} < \theta < \frac{\sin^{-1}\left(\frac{k}{c}\right)^2}{2}$

$$\frac{\sin^{-1}\left(\frac{k}{c}\right)^2}{2}$$

說明：

在 $r(\theta)$ 的表達式中，若僅取正號會導致 P 點並非整個圖形上的動點，僅取負號時亦同，因此需取兩種（圖片中取負號者為紫(P_1)，取正號者為綠(P_2)）。而在 $r(\theta)$ 的表達式中，正負號後的根號內在某些情況下會成為虛數，即 $k^4 < c^4 \sin^2 2\theta$ ，

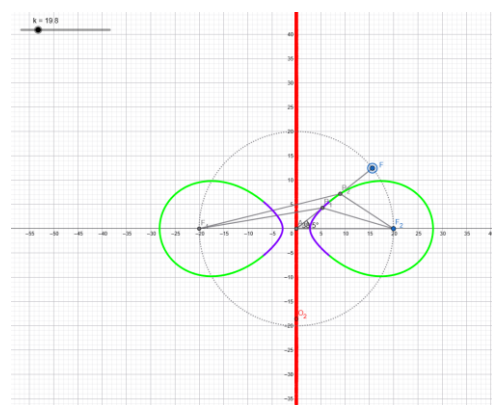
因此 $-\frac{\sin^{-1}\left(\frac{k}{c}\right)^2}{2} < \theta < \frac{\sin^{-1}\left(\frac{k}{c}\right)^2}{2}$ 。



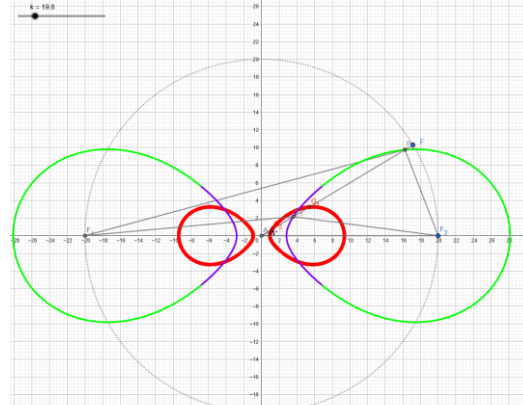
$$r(\theta) = \sqrt{c^2 \cos 2\theta - \sqrt{k^4 - c^4 \sin^2 2\theta}} \quad r(\theta) = \sqrt{c^2 \cos 2\theta + \sqrt{k^4 - c^4 \sin^2 2\theta}}$$

(二) $\frac{k}{c} < 1$ 時之四心軌跡圖形

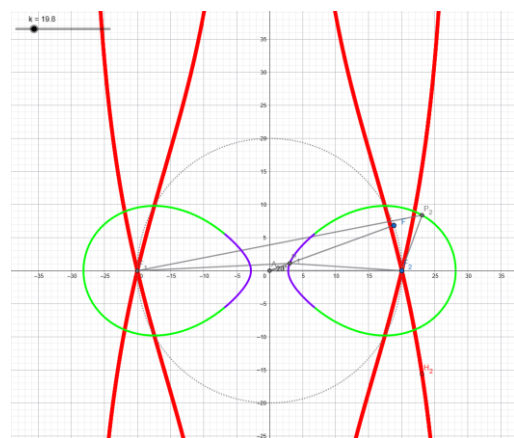
外心：包含於整個 $x = 0$ 的圖形中



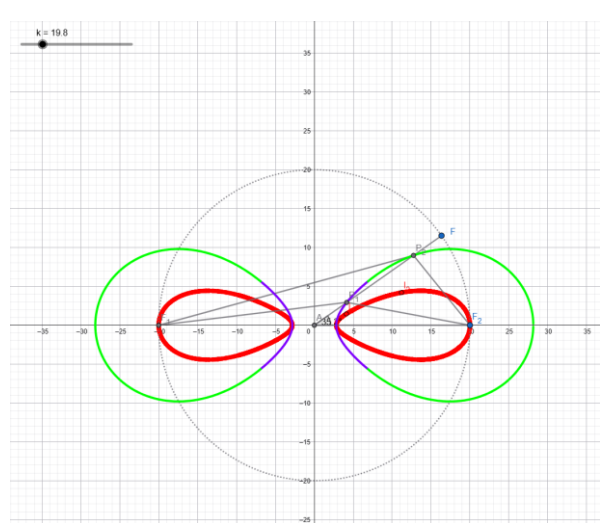
重心：為二封閉曲線



垂心：為一四次點對稱圖形



內心：為二封閉曲線



1. 在 $\frac{k}{c} < 1$ 時， $r(\theta)$ 根號中取正號及負號，將 $r(\theta)$ 帶入 $\frac{k}{c} > 1$ 時的座標，即為此時的四心座標，與 $\frac{k}{c} > 1$ 時座標相同。
2. 在 $\frac{k}{c} < 1$ 時，四心軌跡同 $\frac{k}{c} > 1$ 時的方程式。

柒、結論

一、透過圓的旋轉定義對兩定點至一動點和差積比之一成定值時，該動點與圓直徑兩端點所建構之三角形中，分別取其四心，觀察三角形頂點於四種圖形上移動時，四心軌跡會出現圓錐曲線及三次以上的函數圖形。

二、四心軌跡方程

(一) 外心軌跡

1. 橢圓時：包括於 $x = 0$ 的圖形 $\Rightarrow$ 軌跡為鉛直線

此時 $\pm \frac{b^2-c^2}{2b}$ 分別為 $\theta = \pm 90^\circ$ 時的最大值與最小值。

2. 雙曲線時：包括於 $x = 0$ 的圖形 $\Rightarrow$ 軌跡為鉛直線

無極值，座標為 $\left(0, \frac{c^2}{2b} \tan \theta - \frac{b}{2} \cot \theta\right)$ 。

3. 阿波羅圓時：包括於 $x = 0$ 的圖形 $\Rightarrow$ 軌跡為鉛直線

無極值，座標為 $\left(0, \frac{2ck-c \cos \theta (k^2+1)}{\sin \theta (k^2-1)}\right)$ 。

4. 卡西尼卵形線時：包括於 $x = 0$ 的圖形 $\Rightarrow$ 軌跡為鉛直線

此時 $\pm \frac{r^2(\theta)-c^2}{2r(\theta)}$ ，分別為 $\theta = \pm 90^\circ$ 時的最大值與最小值。

(二) 重心軌跡

1. 橢圓時： $\frac{9x^2}{a^2} + \frac{9y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ 軌跡為一橢圓（長軸、短軸長各縮小 $\frac{1}{3}$ ）。

2. 雙曲線時： $\frac{9x^2}{a^2} - \frac{9y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ 軌跡為一雙曲線（實軸、共軛軸長各縮小 $\frac{1}{3}$ ）。

3. 阿波羅圓時： $\left(x + \frac{c(k^2+1)}{3(k^2-1)}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2ck}{3(k^2-1)}\right)^2 \Rightarrow$ 軌跡為一圓（半徑、圓心座標各縮小 $\frac{1}{3}$ ）。

4. 卡西尼卵形線時： $(x^2 + y^2)^2 - \frac{2}{9}c^2(x^2 - y^2) = \frac{k^4 - c^4}{81} \Rightarrow$ 軌跡為一卡西尼卵形線（ c 、 k 各縮小 $\frac{1}{3}$ ）。

(三) 垂心軌跡

1. 橢圓時： $y^2 = \frac{(c^2-x^2)^2}{b^2 - \left(\frac{b}{a}x\right)^2} \Rightarrow$ 軌跡為一四次點對稱曲線。
2. 雙曲線時： $y^2 = \frac{(c^2-x^2)^2}{\left(\frac{b}{a}x\right)^2 - b^2} \Rightarrow$ 軌跡為一四次點對稱曲線。
3. 阿波羅圓時： $y^2 = \frac{(k^2-1)(c^2-x^2)^2}{(c-x)^2 - k^2(c+x)^2} \Rightarrow$ 軌跡為一四次點對稱曲線。
4. 卡西尼卵形線時： $\left[\left(\frac{x^2-c^2}{y}\right)^2 + x^2 + c^2\right]^2 = k^4 + 4c^2x^2 \Rightarrow$ 軌跡為一八次點對稱曲線。

(四) 內心軌跡

1. 橢圓時： $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{bc}{a+c}\right)^2} = 1 \Rightarrow$ 軌跡為一橢圓（長軸、短軸長各變為 c 、 $\frac{bc}{a+c}$ ）。
2. 雙曲線時： 軌跡包含於 $x = \pm a \Rightarrow$ 軌跡為二鉛直線段
 $y = \pm b$ 分別為其最高點和最低點。
3. 阿波羅圓時： 包含於 $\frac{x^2+y^2-c^2}{x^2-y^2-c^2} = \frac{c(1-k)}{x(1+k)} \Rightarrow$ 軌跡為一封閉曲線。
4. 卡西尼卵形線時： $\frac{\sqrt{k^4-(r^2-c^2)^2}}{\sqrt{(r^2+c^2)^2-k^4+2c^2}} = \frac{2y(x+c)}{(x+c)^2-y^2} \Rightarrow$ 軌跡為一封閉曲線。

三、卡西尼卵形線中，在 $\frac{k}{c}$ 大於、等於或小於1時，參數式會不同，但座標的公式均相同，軌跡方程式亦相通。

捌、參考資料及其他

- 一、林軒民、沈柏瑋，運用之妙存乎於心，中華民國第 49 屆中小學科學展覽會作品說明書國中組數學科佳作。
- 二、李岳洲，【橢圓及雙曲線焦點三角形的相關幾何量】，數學傳播期刊 37 卷 1 期，p.75-82
- 三、李坤能（民 101）。國民中學數學第四、五冊（三版）。台南市：翰林。
- 四、游森棚（民 100）。高中數學第三、四冊(五版)。翰林出版社。
- 五、E. Lockwood，A Book of Curves。劍橋大學出版社。