

花蓮縣第 66 屆國民中小學科學展覽會
作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：『洞』察『棋』跡

關 鍵 詞：播棋、餘數定理、函數

編 號：

（由教育處統一編列）

目錄

摘要	1
壹、研究動機	1
貳、研究目的與研究問題	1
參、解釋名詞	2
肆、預備知識	2
伍、研究過程與方法	3
一、探討曼卡拉遊戲規則.....	3
二、找出曼卡拉遊戲的致勝策略.....	5
三、如何迅速找出最後一顆棋子的落點位置.....	6
四、每方各有兩個坑洞，每坑各有 2~4 顆棋子，分析結束遊戲最少步數.....	8
五、每方各有三個坑洞，每坑各有 2~4 顆棋子，分析結束遊戲最少步數.....	12
六、每方各有四個坑洞，每坑各有 2~4 顆棋子，分析結束遊戲最少步數.....	18
陸、研究討論.....	23
柒、研究結果.....	29
捌、參考資料.....	30

摘要

本研究以曼卡拉棋（Mancala）中的「Kalah」版本為探討對象，研究過程中，我們透過實際操作與反覆驗證，分析棋子移動的規律，並嘗試改變不同的初始條件與坑洞數量，觀察其對遊戲結果的影響。包括釐清曼卡拉棋的基本規則、探討可能的致勝策略，以及建立快速判斷最後一顆棋子落點的方法。此外，我們亦針對不同棋盤規模，分析結束遊戲所需的最少步數，歸納其變化趨勢。曼卡拉棋不僅具備娛樂性，更蘊含規律性的數學結構與策略思維。透過系統化分析與實驗，我們能更有效掌握遊戲節奏。本研究期望能提供大眾理解曼卡拉棋運作機制與策略思考之基礎，並展現數學與遊戲結合的趣味與價值。

本研究所有圖片、圖表皆為作者自行繪製、編製

壹、研究動機

暑假我們到日本進行交流，並參訪了萬國博覽會，在那裡，我們接觸到一項十分有趣的非洲的古老遊戲，叫做曼卡拉棋（Mancala）。其歷史可追溯至數千年前，最初的玩法非常簡單原始，直接在地上挖坑，以石頭、種子或貝殼作為棋子，在兩橫列的小凹洞中進行移動對戰。我們看到的是曼卡拉棋眾多版本中的「Kalah」，也稱作「北美播棋」或「沃里」，此版本使用的道具為一個棋盤，棋盤上共有十二個坑洞與兩個寶庫，分成兩排；每一排包含六個坑洞與一個寶庫，分別由雙方各自控制。遊戲開始時，每個小格內皆放有四顆棋子，最終以雙方所獲得的棋子數量多寡決定勝負。那時候我們和帶隊老師對戰總是落敗，這激起了我們強烈的研究動機。我們對此產生了濃厚的興趣與好奇心，決定進一步深入探討曼卡拉棋的奧妙。



圖 1 肯亞岩石刻曼卡拉棋盤

資料來源：Ancient Pages（2024）

貳、研究目的與研究問題

我們藉由實際操作找出棋子移動的秘密。並且嘗試改變不同的條件以及規則，看看結果是不是會有不一樣的變化？

- 一、探討曼卡拉遊戲規則。
- 二、找出曼卡拉遊戲的致勝策略。

- 三、如何迅速找出最後一顆棋子的落點位置？
- 四、每方各有兩個坑洞，每坑各有 2~4 顆棋子，分析結束遊戲最少步數。
- 五、每方各有三個坑洞，每坑各有 2~4 顆棋子，分析結束遊戲最少步數。
- 六、每方各有四個坑洞，每坑各有 2~4 顆棋子，分析結束遊戲最少步數。

參、 解釋名詞

- 一、A1~A6 為玩家 A 所屬的坑洞，B1~B6 為玩家 B 所屬的坑洞。
- 二、R1 為玩家 A 所屬的寶庫，R2 為玩家 B 所屬的寶庫。
- 三、P 為走一個完整循環會經過的坑洞數，但不包含對手的寶庫，亦可說一個完整的循環所需的石頭數量。
- 四、q 代表棋子繞了幾圈。
- 五、r 代表走完完整循環之後所剩餘的棋數。
- 六、T 為單側坑洞數。
- 七、d 為坑洞和寶庫之間的距離。
- 八、S 為移動起始格中的棋子數。
- 九、M 為結束遊戲最少的總步數。
- 十、L 在移動過程中，不計入對手寶庫時所經過的坑洞總數。
- 十一、C 代表補償項。
- 十二、B 為理想下界的代表值。

肆、 預備知識

下取整函數：即為**取底符號**，在數學中一般記作 $\lfloor x \rfloor$ ，在電腦科學中一般記作 $\text{floor}(x)$ ，表示不超過 x 的整數中最大的一個。

上取整函數：即為**取頂符號**在數學中一般記作 $\lceil x \rceil$ ，在電腦科學中一般記作 $\text{ceil}(x)$ ，表示不小於 x 的整數中最小的一個。

餘數定理：當一個數字去除以另一個數時，可能不會剛好分完，最後會剩下一些數，這個剩下的數就叫做**餘數**，也可以說，一個數可以表示成幾個除數的倍數，再加上剩下的餘數。

伍、 研究過程與方法

問題一：探討曼卡拉的遊戲規則

一、 遊戲規則介紹

棋盤介紹：遊戲在一個棋盤上進行(如下圖)，棋盤是由兩排坑洞(各六個)和兩個「寶庫」(用於存放棋子的大坑，以下稱寶庫)組成。

曼卡拉的遊戲規則：

規則一：每位玩家控制自己的一側坑洞，盡可能將棋子放入自己**右側**的「寶庫」中。

規則二：玩家輪流從自己的某個坑洞中取出所有棋子，並按逆時針方向逐個放入相鄰的坑洞，**跳過**對手的「寶庫」。

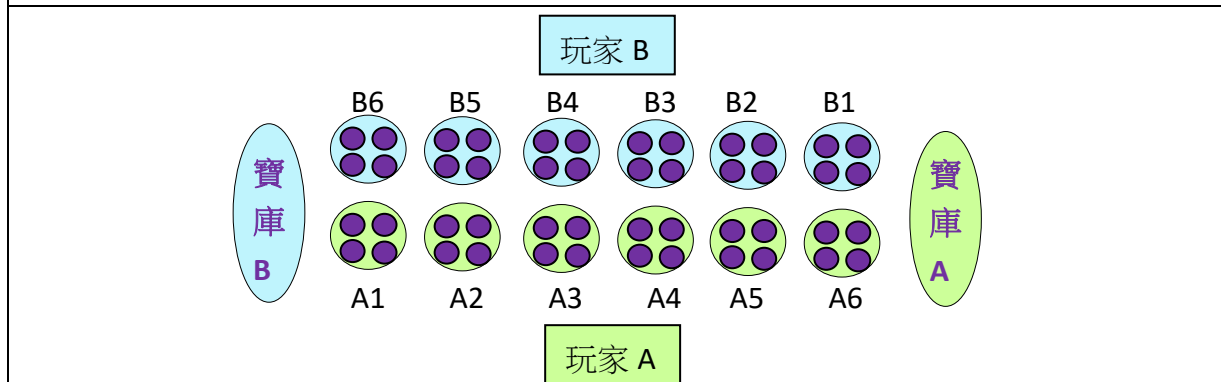
規則三：放棋子的過程從選定的坑洞的下一個坑開始，按順序進行。

規則四：如果最後一顆棋子落入自己的「寶庫」，玩家可以獲得額外的一回合。

規則五：如果最後一顆棋子落入自己一側的**空坑**，並且**對面坑中有棋子**，則可以將對面坑裡的所有棋子連同自己的棋子一起放入自己的「寶庫」。

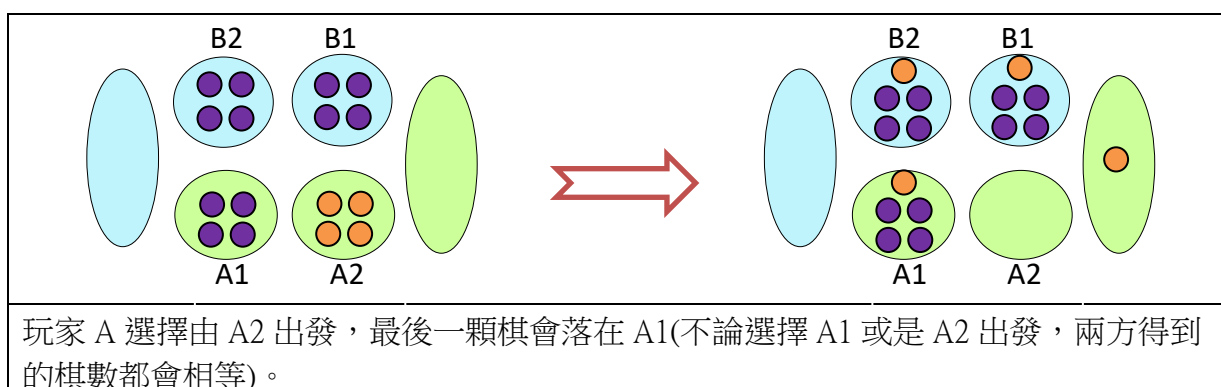
規則六：其中一名玩家的所有坑洞變空，此時遊戲結束。

規則七：擁有最多棋子的玩家獲勝。

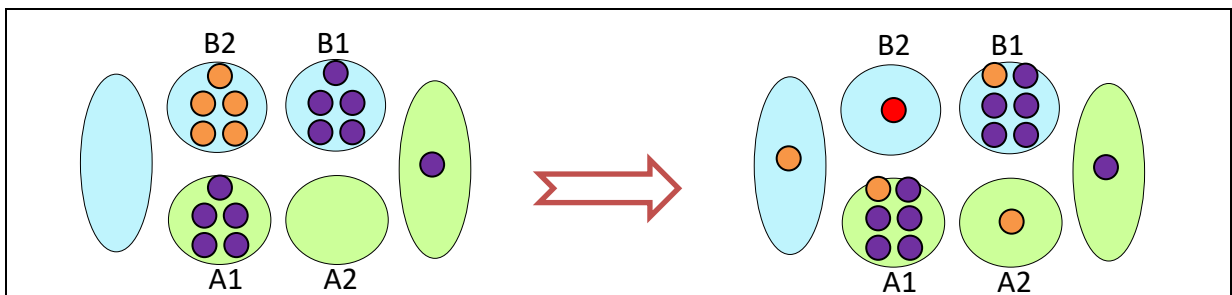


二、 遊戲範例

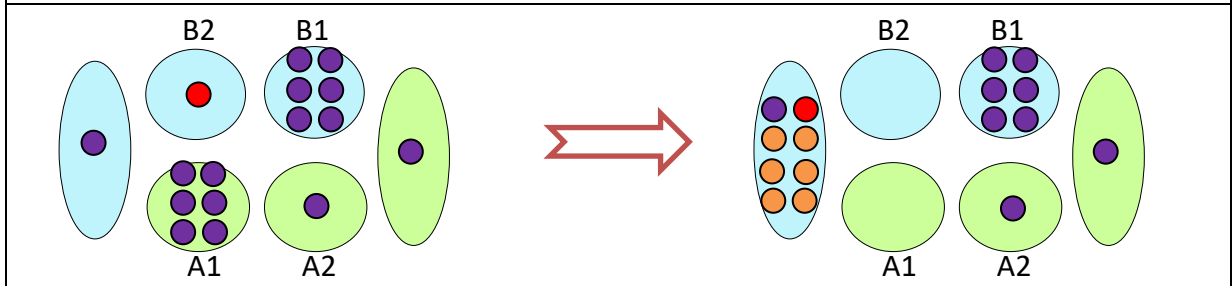
我們先將棋盤規模簡化：每位玩家各有兩個坑洞，且每個坑洞中放置四顆棋子。圖中綠色圓形區域代表玩家 A 的坑洞，藍色圓形區域則代表玩家 B 的坑洞；綠色橢圓形區域為玩家 A 的寶庫，藍色橢圓形區域為玩家 B 的寶庫。遊戲由玩家 A 先走，橘色棋子用來標示當前的玩家所選取和捕捉的棋子，以及該棋子移動後所在的位置。



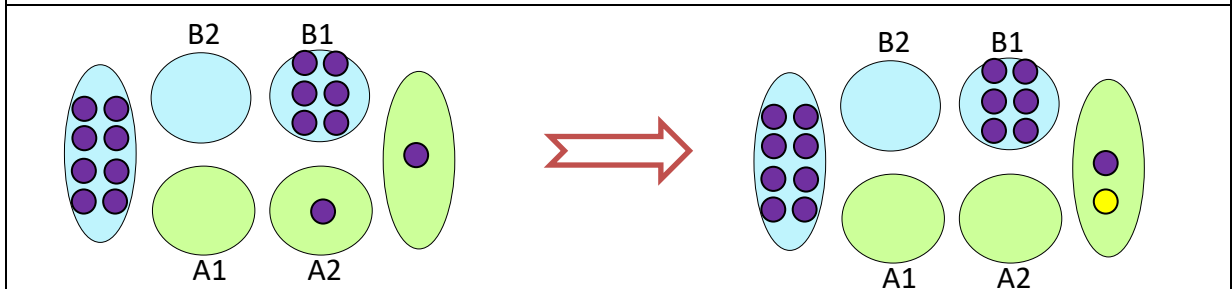
玩家 A 選擇由 A2 出發，最後一顆棋會落在 A1(不論選擇 A1 或是 A2 出發，兩方得到的棋數都會相等)。



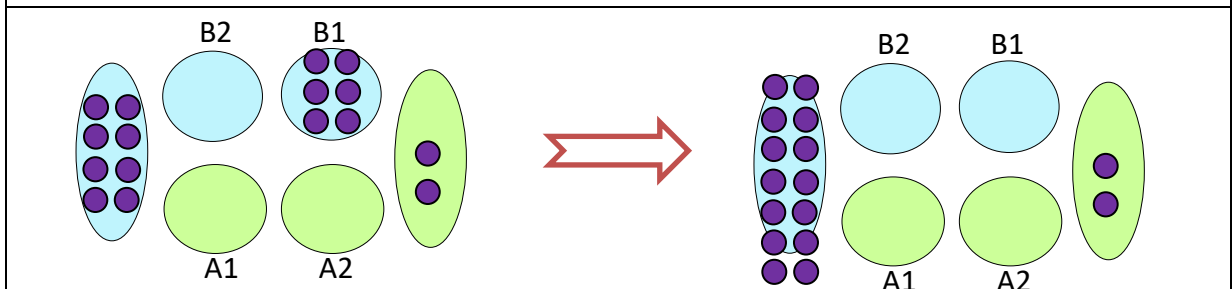
玩家 B 不論從 B1 出發或是由 B2 出發，都會清空自己的坑洞，使最後一顆棋回到自己的空坑中(如上圖紅色棋子)，獲得捕捉的機會，但 A1 的棋數較多，故選擇 B2 出發，可以捕捉到比較多的棋子。



承上，玩家 B 的最後一顆棋子落入自己一側的空坑，並且對面坑洞(A1)中有棋子，則可以捕捉對面坑洞裡的所有棋子連同自己的棋子一起放入自己的「寶庫」。



玩家 A 沒有選擇，因為只剩 A2 的坑洞有棋子，所以只能選擇由 A2 出發，最後一顆棋會落入自己的寶庫 R1。



此時其中一名玩家的所有坑洞變空，遊戲結束。玩家 B 擁有最多棋子，獲勝。

問題二：找出曼卡拉遊戲的致勝策略？

以下我們用兩種顏色分別表示兩個玩家所屬的坑洞，綠色為玩家 A，藍色坑洞為玩家 B，橘色的棋子則為當次玩家棋子移動的情況，黃棋代表可獲得額外一回合的機會，箭頭是指起始的坑洞，以下二種都是由玩家 A(綠色坑洞)先走，但結果卻大不相同，我們一起來解鎖其中奧秘吧。

一、第一種走法

玩家 A 選擇由 A1 開始	第一回合玩家 A 路徑：A1→A2→R1 最後一顆棋子落入自己的「寶庫」，玩家 A 可以獲得額外的一回合	玩家 A 選擇由 A2 出發	第二回合玩家 A 路徑：A2→R1→B1→B2 ➡️遊戲結束
玩家 B 獲勝			

二、第二種走法

玩家 A 選擇由 A2 開始	第一次玩家 A 路徑：A2→R1→B1	第二次玩家 B 路徑：B2→R2→A1	第三次玩家 A 路徑：A1→A2→R1→B1
第四次玩家 B 路徑：B1→B2→R2→A1→A2	第五次玩家 A 路徑：A1→A2	第六次玩家 B 路徑：B2→R2 ➡️遊戲結束	玩家 A 獲勝

【整理】

一、由上表我們可以整理贏的策略

- (一)、盡可能將棋子放在可以連續得分的路徑(坑洞)上。
- (二)、盡量將最後一顆棋落入自己的寶庫中，即可獲得另外一回合。
- (三)、若發現自己坑洞中的棋子數較少時，盡量避免提早結束遊戲。
- (四)、若發現自己坑洞中的棋子數較多時，盡量想辦法清空自己坑洞中的棋子數使遊戲提早結束。
- (五)、由上可以知道**最後一顆棋**落入的位置至關重要。

問題三：如何迅速找出最後一顆棋子的落點位置？

以下我們以兩種顏色區分兩位玩家的坑洞：綠色代表玩家 A，藍色代表玩家 B；橘色棋子則標示當回合玩家所移動的最後一顆棋子，箭頭是指起始的坑洞，皆由玩家 A 從 A1 先走，藉由比較不同棋子數的變化，探討最後一顆棋子的落點規律。

(一)依序找出 4~18 顆棋，A1 出發，最後一顆棋的落點

4 顆棋 A1 出發	5 顆棋 A1 出發	6 顆棋 A1 出發	7 顆棋 A1 出發	8 顆棋 A1 出發
A1→A2→R1→B1 →B2	A1→A2→R1→B1 →B2→A1	A1→A2→R1→B1 →B2→A1→A2	A1→A2→R1→B1 →B2→A1→A2→R1	A1→A2→R1→B1 →B2→A1→A2→R1 →B1
9 顆棋 A1 出發	10 顆棋 A1 出發	11 顆棋 A1 出發	12 顆棋 A1 出發	13 顆棋 A1 出發
A1→A2→R1→B1 →B2→A1→A2→R1 →B1→B2	A1→A2→R1→B1 →B2→A1→A2→R1 →B1→B2→A1	A1→A2→R1→B1 →B2→A1→A2→R1 →B1→B2→A1→A2	A1→A2→R1→B1 →B2→A1→A2→R1 →B1→B2→A1→A2 →R1	A1→A2→R1→B1 →B2→A1→A2→R1 →B1→B2→A1→A2 →R1→B1
14 顆棋 A1 出發	15 顆棋 A1 出發	16 顆棋 A1 出發	17 顆棋 A1 出發	18 顆棋 A1 出發

A1→A2→R1→B1 →B2→A1→A2→R1 →B1→B2→A1→A2 →R1→B1→B2	A1→A2→R1→B1 →B2→A1→A2→R1 →B1→B2→A1→A2 →R1→B1→B2→A1	A1→A2→R1→B1 →B2→A1→A2→R1 →B1→B2→A1→A2 →R1→B1→B2→A1 →A2	A1→A2→R1→B1 →B2→A1→A2→R1 →B1→B2→A1→A2 →R1→B1→B2→A1 →A2→R1	A1→A2→R1→B1 →B2→A1→A2→R1 →B1→B2→A1→A2 →R1→B1→B2→A1 →A2→R1→B1
--	---	--	---	--

【整理】

- (一)、由上述走法可知，一個完整循環所經過的坑洞數為 5 格（不含對手的寶庫）。
- (二)、繞完一圈，每個坑洞都可以獲得一顆棋子（不含對手的寶庫）。
- (三)、無法繞完一整圈的棋子，則由 A1 的下一個坑洞依序放入。
- (四)、根據以上性質可整理成以下通式：

$$S = P \times q + r$$

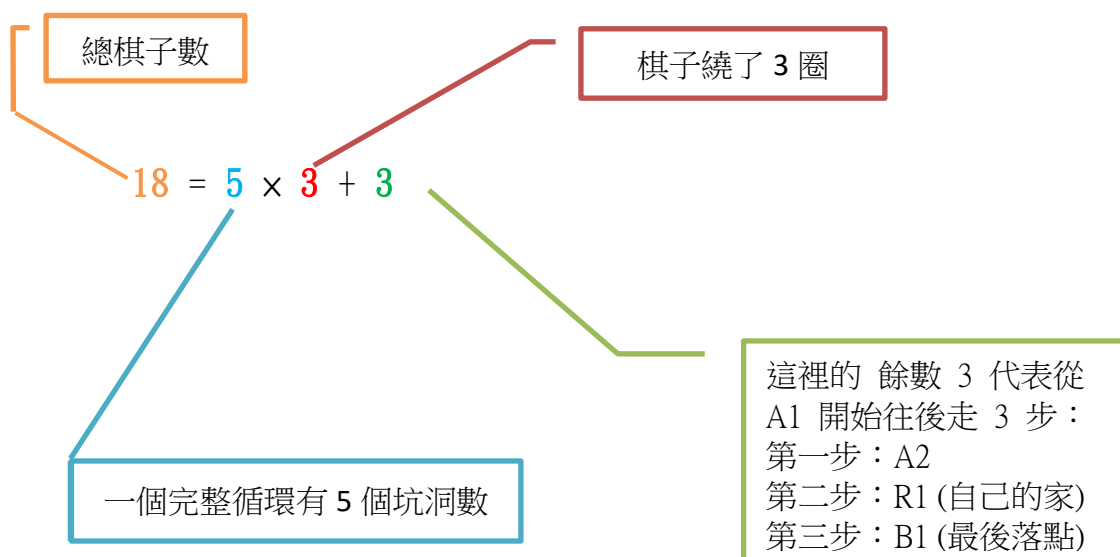
S：移動起始格中的棋子數。

P：一個完整循環的坑洞數（不包含對手的寶庫）。

q：代表棋子繞了幾圈（商數）。

r：代表最後剩餘的步數（餘數），這就是決定落點的關鍵。

〈以 18 顆棋為例〉



問題四：每方各有兩個坑洞，每洞各有 2~4 顆棋子的條件下，分析結束遊戲最少步數。

我們用兩種顏色分別表示兩個玩家所屬的坑洞，綠色為玩家 A，藍色坑洞為玩家 B，橘棋則為當次玩家所移動的棋子，紅棋代表捕捉，黃棋代表可獲得額外一回合的機會，圖中箭頭所指的位置為起始的坑洞，以下由玩家 A(綠色坑洞)先走，探討結束遊戲最少步數。

(一)找出每邊兩個坑洞，每洞 2 顆，結束遊戲最少步數

由玩家 A 先走，選擇由 A1 坑洞先走	路徑：A1 → A2 → R1 最後一顆棋落入自己的「寶庫」，依據規則四，玩家 A 可以獲得額外的一回合	承上，玩家 A 選擇由 A2 坑洞開始走
路徑：A2 → R1 → B1 → B2 最後一顆棋在 B2，根據規則六，其中一名玩家的所有坑洞變空時，遊戲結束	玩家 B 寶庫中的棋數較多，獲勝。	

(二)找出每邊兩個坑洞，每洞 3 顆，結束遊戲最少步數

由玩家 A 先走，選擇由 A2 坑洞先走	路徑：A2 → R1 → B1 → B2 最後一顆棋子落在 B2	輪到玩家 B 走，玩家 B 選擇由 B1 出發

路徑：B1→B2→R2→A1→A2 最後一顆棋子落在 A2	輪到玩家 A 走，玩家 A 選擇由 A1 先出發	路徑：A1→A2 →R1 →B1 →B2 最後一顆棋落在 B2
輪到玩家 B 走，玩家 B 選擇由 B1 出發	路徑：B1→B2 最後一顆棋子落在 B2	輪到玩家 A 走，玩家 A 選擇由 A2 先出發
路徑：A2→R1→B1 最後一顆棋落在 B1，根據規則六，其中一名玩家的所有坑洞變空，遊戲結束	玩家 B 寶庫中的棋數較多，獲勝。	

(三)找出每邊兩個坑洞，每洞 4 顆，結束遊戲最少步數

由玩家 A 先走，選擇由 A2 坑洞先走，使最後一顆落入自己的坑洞或寶庫中	路徑：A2 →R1 →B1→B2 →A1 最後一顆落入坑洞 A1	輪到玩家 B，玩家 B 選擇靠近自己的坑洞 B2 走

路徑：B2 → R2 → A1 → A2 → B1 → B2 最後一顆棋子在 B2	根據規則五，最後一顆棋落入自己一側的空坑(如上紅棋)，並且對面坑洞中有棋子，則可將對面坑洞裡所有棋子連同自己的棋子一起放入自己的「寶庫」	B2 捕捉 A1 輪到玩家 A，剩一顆棋 (A2)，選擇 A2 走
路徑：A2 → R1 此時其中一名玩家的所有坑洞變空，遊戲結束。	玩家 B 寶庫中的棋數較多，獲勝。	

【整理】

一、將以上最少步數整理如下表

		每邊 2 洞
2 顆棋子	回合	2
	棋子數	5
3 顆棋子	回合	4
	棋子數	20
4 顆棋子	回合	3
	棋子數	17

二、由上我們可以發現幾個減少步數的技巧

每邊兩洞時的發現 ($T=2$)，我們先定義每邊 2 洞棋盤的單圈長度長 L ，玩家 A 的兩洞距離寶庫的距離 $d=1$ 與 $d=2$ ，繞行一圈包含自己 2 洞+自己寶庫 + 對方 2 洞=5 個節點 ($L=5$)，遊戲最少步數的關鍵在於是否能創造「額外回合」及「捕捉」，這都受到餘數的影響。我們依序討論當 T 不變， S (棋子數) = 2, 3, 4 時

- (一)、當棋子 $S=2$ 時，最少步數 $M=2$ ，會發現玩家 A 的坑洞 ($A1$) 距離寶庫剛好是 2 步，而坑洞裡有 2 顆棋子 ($S=d=2$)，玩家 A 第一手移動坑洞 ($A1$) 棋子可以全部進庫，立刻獲得額外回合，進而在一回合內清空棋盤，且沒有受到任何阻力達到 2 步極速獲勝。
- (二)、當棋子 $S=3$ 時，出現了數學中的奇偶不相配現象。當棋子數變成 3 顆時，尷尬的情況發生了。3 大於到寶庫的距離 ($d=1$ 或 $d=2$)，但又不足以繞完一圈 ($L=5$) 回到自己的坑洞。在圖中發現如果移動坑洞 ($A1$) 的 3 顆棋子，最後一顆會落在對手的第一坑洞 ($B1$)，也就表示你把棋子送給了對手，並且被迫結束回合，而失去了連貫性，雙方必須進入資源交換與防守的節奏中，導致控制權的轉移而不數被拉長，攀升至 4 步。
- (三)、當棋子 $S=4$ 時，出現數學餘數中的回流效應。因為 $S=4$ 非常接近單圈長度 $L=5$ ，所以當玩家 A 移動坑洞 ($A2$) 距離寶庫一步時，路徑是：寶庫 ($P1$) → 對手 $B1$ → 對手 $B2$ → $P1$ 的坑洞 ($A1$) 雖然回合結束了，但最後一顆棋子精準的回到了自己的坑洞。回到自己坑洞的棋子反而幫助玩家補充棋子數，為下一手的「捕捉」或「連續進庫」佈下了機會，因為強大的「回流效應」抵銷了棋子數變多的劣勢，使遊戲在第三步就結束。

【發現】

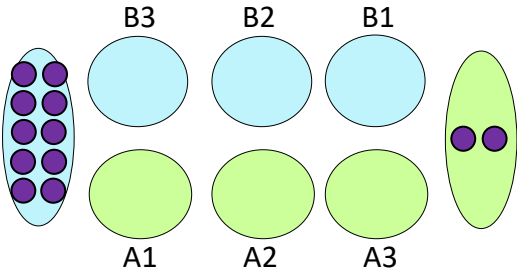
在 $T=2$ 的最少步數中，證明了在極小的移動空間中，曼卡拉棋的最少獲勝步數並非單純的算術累加，而是依據 S 與 d 之間的相關性，創造出獲勝捷徑。

問題五：每方各有三個坑洞，每洞各有 2~4 顆棋子的條件下，分析結束遊戲最少步數。

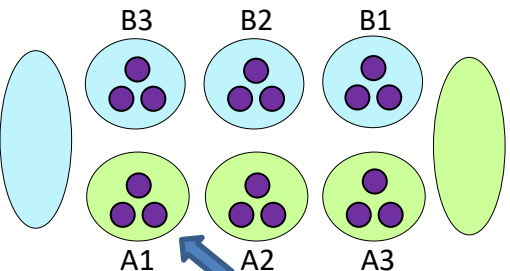
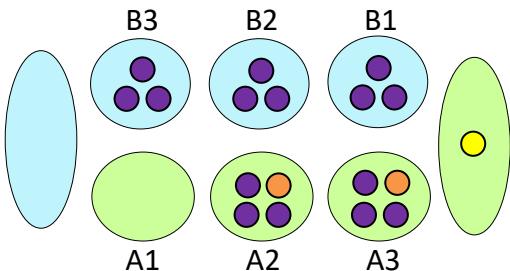
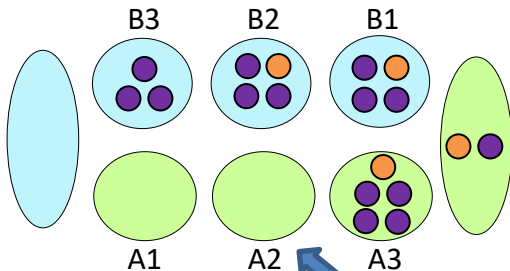
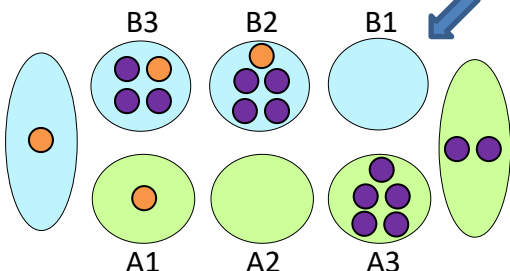
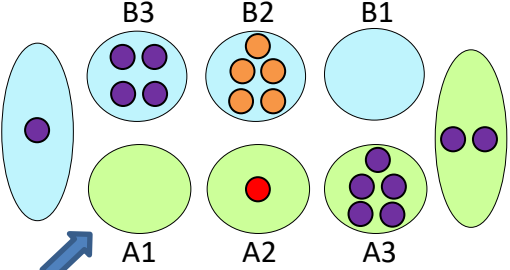
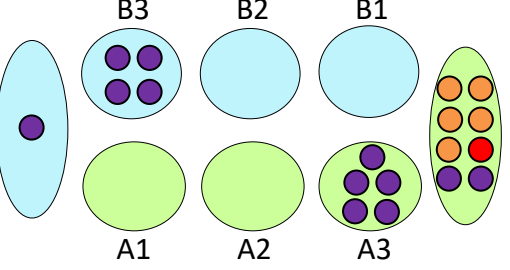
我們用兩種顏色分別表示兩個玩家所屬的坑洞，綠色為玩家 A，藍色坑洞為玩家 B，橘棋則為當次玩家所移動的棋子，紅棋代表捕捉，黃棋代表可獲得額外一回合的機會，圖中箭頭所指的位置為起始的坑洞，以下由玩家 A(綠色坑洞)先走，探討結束遊戲最少步數。

(一)找出每邊三個坑洞，每洞 2 顆，結束遊戲最少步數

玩家一選擇從 A1 出發	路徑：A1 → A2 → A3
玩家 B 由 B1 出發 路徑：B1 → B2 → B3	玩家 A 由 A2 出發 路徑：A2 → A3 → R1 → B1
玩家 B 由 B1 出發 路徑：B1 → B2	玩家 A 由 A3 出發 路徑：A3 → R1 → B1 → B2 → B3

	
玩家 B 獲勝	

(二)找出每邊三個坑洞，每洞 3 顆，結束遊戲最少步數

	
玩家一選擇從 A1 出發	路徑：A1→A2→A3→R1
	
玩家 A 由 A2 出發 路徑：A2→A3→R1→B1→B2	玩家 B 由 B1 出發 路徑： B1→B2→B3→R2→A1
	
玩家 A 由 A1 出發 路徑：A1→A2(捕捉)	A2 捕捉 B2

玩家 B 由 B3 出發 路徑：B3→R2→A1→A2→A3	玩家 A 獲勝

(三)找出每邊三個坑洞，每洞 4 顆，結束遊戲最少步數

玩家一選擇從 A3 出發	路徑：A3→R1→B1→B2→B3
玩家 B 由 B1 出發 路徑：B1→B2→B3 →R2→A1→A2	玩家 A 由 A2 出發 路徑：A2 →A3 →R1→B1→B2→B3
玩家 B 由 B3 出發 路徑：B3→R2→A1→ A2 →A3 →B1→B2→B3(捕捉)	B3 捕捉 A1

玩家 A 由 A2 出發 路徑：A2 → A3	玩家 B 由 B1 出發 路徑：B1 → B2 → B3
玩家 A 由 A3 出發 路徑：A3 → R1 → B1 → B2	B 玩家獲勝

【整理】

一、將以上最少步數整理如下表

		每邊 3 洞
2 顆棋子	回合	5
	棋子數	12
3 顆棋子	回合	5
	棋子數	22
4 顆棋子	回合	7
	棋子數	34

二、由上我們可以發現幾個減少步數的技巧（**T= 3時**）

當我們把棋盤固定在 3 個坑洞(T=3)時，數據出現了一個非常有意思的轉折：初始棋數從 2 顆變為 3 顆，步數竟然一點都沒增加！這種「步數平原」現象（5 步→ 5 步 → 7 步），清楚地告訴我們：曼卡拉並不是棋子數越多就越難下，而是與空間大小有著密不可分的關係。

我們試著把這一段「不規律」的變化，拆解成三個階段來理解：

- (一)、在 $S=2$ 狀態下，初始棋數嚴格小於計分庫的最遠距離 ($S < d=3$)。當玩家啟動最遠端之坑洞時 (A1)，其 2 顆棋子最後落點無法越過邊界 ($d=3$) 抵達計分寶庫，所以無法在首回合觸發「連續進庫」的獎勵機制。清盤過程被迫變得斷斷續續。玩家必須耗費額外的回合進行「位移補償」，也就是先花步數把後方的棋子往前推進，以便縮短後續進庫的距離。這些無法直接得分的「墊步」，就是造成步數非線性增加 (高達 5 步) 的主要原因。
- (二)、當初始棋子數來到 $S=3$ 時，播棋產生了奇妙的臨界轉折。此時，最遠端坑洞的距離剛好等於初始棋子數 ($S = d= 3$)，達成了「完美配合」。玩家的首手播種，最後一顆棋子會精準著落在計分寶庫，瞬間觸發連續行動的獎勵。儘管坑洞內的總棋子數增加了，但因為達成了「完美共振」，這股連續進庫的爆發力達到了完美抵銷需要處理額外棋子所需的步數。所以解釋了 $S=2$ 與 $S=3$ 的最少步數會產生「停滯效應」，最少步數皆為 5 步。我們可以說 $S=3$ 是「最佳效率臨界點」。
- (三)、當初始棋子數越過最佳效率臨界點來到 $S=4$ 時，棋子數量已大於單側坑洞數長度 ($S > d=3$)。這意味著無論啟動哪一個坑洞，播種的過程必然會產生「溢出現象」，最後一顆棋子將強制落在對手的坑洞內。這種溢出現象不僅無法觸發連續進庫，更會將遊戲的控制權與棋子數量雙雙轉移給對手。為了重新奪回盤面優勢並回收落入敵區的棋子，必須付出額外步數。因此，在每邊 3 洞時會有跨越臨界點後的這一顆超額棋子，破壞了原本的平衡，導致總步數瞬間暴增 2 步，攀升至 7 步的超額耗散狀態。

【發現】

曼卡拉棋是一個「連續且均勻的能量流動系統」，所以試著用每邊坑洞數及棋子總數找出與最少步數的相關性，我們假設理想步數 $= \frac{\text{總棋子數}(2TS)}{\text{單圈步數}(T+1)}$ ，但實測後發現這個概念行不通因為曼卡拉棋是一個「離散」且帶有「條件觸發（進庫獎勵、捕捉）」的遊戲。但在分析 $T= 3$ 的情況中， $S =2、3、4$ 的獲勝策略，發現了 $T= 3, S=3$ 會有最

佳效益點，運用這個特性與理想步數的概念，發現坑洞固定不變時，改變棋子數量會產生一個有趣現象就是理想步數 $=\frac{\text{總棋子數}(2TS)}{\text{單圈步數}(T+1)}=\frac{(2\times 3\times S)}{(3+1)}=\frac{6S}{4}$ ，然而 S 是變數所以將 S 獨立提出成為 $\frac{6}{4}\times S=1.5\times S$ ，且在 S=3 有最佳效率臨界點，為了讓公式的計算有跡可循，我們把這個最完美的狀態 S=3 設定為公式的「原點」即 (S-3)，實際操作中還發現再怎麼最佳化操作最少必要步數為 5 步，因此我們將 5 定義為基準值。

【結論】

因此每邊坑洞為 3 時。最少步數會呈現

$$M(3,S)=5+\left\lceil\frac{2T}{T+1}\times (S-3)\right\rceil=5+\left\lceil 1.5\times (S-3)\right\rceil \quad \text{for } S\geq 3$$

步數必須為整數。因此，我們使用上取整函數。其中當 S=2 時公式中的 (S-3) = (2-3) = -1，步數沒有-1步，所以公式要包含 S=2 時就要取最大值，我們將公式修正為 $M(3,S)=5+\max(0, \lceil 1.5\times (S-3)\rceil)$

$$\text{證明: } M(3,2)=5+\max(0, \lceil 1.5\times (2-3)\rceil)=5+0=5(\text{符合})$$

$$M(3,3)=5+\max(0, \lceil 1.5\times (3-3)\rceil)=5+0=5(\text{符合})$$

$$M(3,4)=5+\max(0, \lceil 1.5\times (4-3)\rceil)=5+2=7(\text{符合})$$

問題六：每方各有四個坑洞，每洞各有 2~4 顆棋子的條件下，分析結束遊戲最少步數。

我們用兩種顏色分別表示兩個玩家所屬的坑洞，綠色為玩家 A，藍色坑洞為玩家 B，橘棋則為當次玩家所移動的棋子，紅棋代表捕捉，黃棋代表可獲得額外一回合的機會，圖中箭頭所指的位置為起始的坑洞，以下由玩家 A(綠色坑洞)先走，探討結束遊戲最少步數。

(一)找出每邊四個坑洞，每洞 2 顆，結束遊戲最少步數

玩家 A 由 A3 出發	路徑:A3→A4→R1
玩家 A 由 A1 出發 路徑:A1→A2→A3(捕捉)	A3 捕捉 B2
玩家 B 由 B3 出發 路徑:B3→B4→R2	玩家 B 由 B1 出發 路徑:B1→B2→B3(捕捉)
B3(捕捉)A2	玩家 A 由 A4 出發 路徑:A4→R1→B1→B2

玩家 B 獲勝	

(二)找出每邊四個坑洞，每洞 3 顆，結束遊戲最少步數

	玩家 A 由 A2 出發 路徑:A2→A3→A4→R1
玩家 A 由 A3 出發 路徑:A3→A4→R1→B1→B2	玩家 B 由 B1 出發 路徑:B1→B2→B3→B4→R2
玩家 B 由 B3 出發 路徑:B3→B4→R2→A1→A2	玩家 A 由 A2 出發 路徑: A2→A3(捕捉)
A3 捕捉 B2	玩家 B 由 B4 出發 路徑: B4→R2→A1→A2→ A3→A4

玩家 A 獲勝	

(三)找出每邊四個坑洞，每洞 4 顆，結束遊戲最少步數

玩家 A 由 A3 出發	路徑:A3→A4 →寶庫 A→ B1→B2
玩家 B 由 B2 出發 路徑:B2→B3 →B4→R2→A1→A2	玩家 A 由 A4 出發 路徑:A4→R1→B1→B2→B3→B4
玩家 B 由 B4 出發 路徑:B4→R2→A1→A2→A3→A4→B1	玩家 A 由 A2 出發 路徑:A2→A3→A4→R1→B1→B2→B3

玩家 B 由 B2 出發 路徑: B2→B3→B4(捕捉)	B4 捕捉 A1
玩家 A 由 A3 出發 路徑: A3→A4→R1	玩家 A 由 A4 出發 路徑: A4→R1→B1→B2
玩家 B 獲勝	

【整理】

一、將以上最少步數整理如下表

		每邊 4 洞
2 顆棋子	回合	5
	棋子數	18
3 顆棋子	回合	6
	棋子數	27
4 顆棋子	回合	8
	棋子數	40

二、由上我們可以發現幾個減少步數的技巧

$T=4$ 時改變 S 的數量，從實作觀察中得出 $S=2$ ， $S=3$ ， $S=4$ ，最少步數呈現非線性增長，最少步數的變化為 5 步 → 6 步 → 8 步。

在研究中，我們固定棋盤的單側坑洞長度為 $T=4$ ，並將初始棋子數 S 作為唯一變數進行分析。根據實際數據，當 S 從 2 遞增至 4 時，最少獲勝步數序列呈現了非線性的 5 步、6 步、8 步。此現象證明了曼卡拉賽局受限於棋坑長度的影響。分析如下：

- (一)、在這個環境下，最棘手的問題是距離。由於初始棋子數 $S=2$ 遠低於到計分庫的最遠距離 ($d=4$)，即便我們從最源頭的坑洞 $A1$ 啟動，棋子也飛不到計分庫。這意味著我們在第一回合就失去了「連動進庫」的機會，被迫進入一種「慢節奏」的挪動模式。玩家必須先花費額外回合把棋子像「短傳接力」一樣往前墊，這種無法一次到位的搬運過程，讓區區 2 顆棋子的清盤任務，竟要耗費高達 5 步才能完成。
- (二)、當初始棋子數增加到 $S=3$ 時，情況進入了一種尷尬的「次臨界狀態」。雖然棋子數變多了，但最遠端到計分庫的距離依然是 4 格，這關鍵的 1 步之差，讓第一手播種剛好「卡」在計分庫門口，看得到卻進不去。既然無法直接觸發「連動」，這多出來的棋子反而變成負擔。玩家必須先耗費回合挪動其他位置的棋子來「墊步」，做足前置作業，才能確保下一波清盤順利。這種為補足位移差而多花的搬運成本，讓最少步數從 5 步微幅增加到了 6 步。
- (三)、當初始棋子數來到 $S=4$ 時，播棋產生了奇妙的臨界轉折。此時，最遠端坑洞的距離剛好等於初始棋子數 ($S=d=4$)，達成了「完美配合」。玩家的首手播種，最後一顆棋子會精準著落在計分寶庫，瞬間觸發連續行動的獎勵。步數之所以躍升至 8 步，原因在於「單側總棋子數高達 16 顆」的急遽擴張。雖然達成了完美共振，玩家仍必須在更廣大的空間中進行複雜的連鎖佈局來搬運這些龐大棋子數量。然而，正是因為 $S=4$ 提供了完美的空間配合，產生

了強大的連續進庫，完美抵銷了處理巨量額外棋子數所預期會產生的大量步數，玩家才能以極高效率的 8 步清空盤面。我們可以說，在 $T=4$ 的棋盤中， $S=4$ 成為了該棋盤空間下的「最佳效率臨界點」。

【發現】

我們依據 $T=3$ 的假設運用在 $T=4$ 中試著用每邊坑洞數及棋子總數找出與最少步數的相關性。觀察實驗數據可發現，無論初始棋子數 S 為何，最少獲勝步數公式中皆固定包含一個額外的常數步數（即 1）。這個 1 並不是自計算誤差或人為的修正，而是因為曼卡拉賽局規則本身所造成的「結構性限制」。在曼卡拉棋的操作邏輯中，每一次移動皆需選擇一個起始坑洞並進行播種。即使玩家在過程中達成了最理想的連續進庫與資源分配，在遊戲尾聲時，盤面上無可避免的一定會殘留棋子，無論如何都必須花費「最後 1 步」進行收尾，用以將最後殘存的棋子數送入計分庫，進而達成清盤的終止條件。最後收尾步驟在邏輯上絕對無法被前期的連續操作所吸收或抵銷，因此在系統中形成了一個不可消除的最小步數下界： $M_4(S) \geq 1$

【結論】

因此每邊坑洞為 4 時，最少步數會呈現

$$M(4,S) = \left\lceil \frac{2T}{T+1} \times S \right\rceil + 1 = \lceil 1.6 \times S \rceil + 1$$

證明： $M(4,2) = \lceil 1.6 \times 2 \rceil + 1 = \lceil 3.2 \rceil + 1 = 4 + 1 = 5$ (符合)

$$M(4,3) = \lceil 1.6 \times 3 \rceil + 1 = \lceil 4.8 \rceil + 1 = 5 + 1 = 6$$
(符合)

$$M(4,4) = \lceil 1.6 \times 4 \rceil + 1 = \lceil 6.4 \rceil + 1 = 7 + 1 = 8$$
(符合)

陸、 研究討論

在學校的數學課中，我們學過了除法與規律尋找。我們不禁好奇：在兩位玩家都完美計算（採取最佳策略）的情況下，一局曼卡拉棋的「最少獲勝步數」，是不是存

在著某種數學規律？我們能不能找出一個「數學公式」，只要輸入「坑洞數」與「棋子數」，就能精準算出最少步數，而不用每一次都採用繁瑣的窮舉運算？曼卡拉棋的迷人之處，在於它多變的組合邏輯。我們嘗試透過二維陣列來定義其狀態空間，藉此簡化並計算出最少步數。曼卡拉棋最迷人的地方，就在於它那種「牽一髮而動全身」的組合邏輯。在分析最少步數時，我們發現數據表現得一點也不「直覺」，主要是受限於規則中的連動機制，步數的增加往往帶有一種「階梯式」的跳躍感。這種非線性的規律特徵，說明了遊戲中隱藏著某種空間與數量的平衡點。為了抓出這些隱形的數學關卡，我們決定從以下幾個變因切入，進行橫向的系統化討論：

一、變因控制與規則定義

為了讓實驗數據具有可比性，我們先將曼卡拉棋的規則標準化：

- (一) **控制變因**：雙方皆採取「最少步數獲勝」的最佳策略（完美算計）；獲勝條件為清空己方盤面。
- (二) **操縱變因**：改變單側的「坑洞數 (T)」與每洞初始的「棋子數 (S)」。
- (三) **應變變因**：記錄完成遊戲所需的「最少總步數 (M)」。

我們將找出的所有「最少步數」，整理成一個矩陣表（如表 1 所示）。透過觀察這張表，我們進行橫向的數據比對，尋找數字跳動的規律。我們成功在表格中辨識出了三種特殊的數學現象：線性成長、奇偶性共振，以及階梯狀的高原現象。

依據表格內容分為三組進行討論。

曼卡拉棋完成一局所需的最少步數（兩位玩家合計）

	單側 2 洞	單側 3 洞	單側 4 洞	單側 5 洞	單側 6 洞
2 顆	2 步	5 步	5 步	6 步	7 步
3 顆	4 步	5 步	6 步	7 步	9 步
4 顆	3 步	7 步	8 步	9 步	9 步

第一組每洞三顆棋

	單側 2 洞	單側 3 洞	單側 4 洞	單側 5 洞	單側 6 洞
3 顆	4 步	5 步	6 步	7 步	9 步

運用先前 $T=3$ 的假設得知曼卡拉棋是一個「連續且均勻的能量流動遊戲」，所以理想步數 $= \frac{\text{總棋子數}(2TS)}{\text{單圈步數}(T+1)}$ ，但實測後發現這個概念行不通因為曼卡拉棋是一個「離散」且帶有「條件觸發（進庫獎勵、捕捉）」的遊戲。觀察播種過程可以發現，棋子的移動具有高度的群聚性。由於「連動」機制允許玩家在不消耗回合的情況下清空棋子，而「捕捉」則會造成資源分佈的突變，這類非線性規則使得單純的平均值不再適用。為了符合離散動態系統中步數必為整數的特性，我們引入上取整函數，將其理想下界重新修正為：

$$B(T,S) = \left\lceil \frac{2TS}{T+1} \right\rceil$$

透過實測數據比對，我們發現當盤面擴展（ $T \geq 3$ ）時，實際最少步數 $M(T,S)$ 必然大於理想下界 $B(T,S)$ 。隨著棋盤長度 T 的增加，棋子分佈變得相對稀疏，這使得玩家難以像在短棋盤中那樣流暢地串聯「連續進庫」。這種空間上的擴張實質上造成了行動效率的損失。為了捕捉這項變數，我們嘗試在預測模型中加入了結構補償項 $C(T,S)$ ，將公式修正為：

$$M(T,S) = \left\lceil \frac{2TS}{T+1} \right\rceil + C(T,S)$$

我們試著把實測的單側坑洞數 T 代入基礎下界公式 $\left\lceil \frac{6T}{T+1} \right\rceil$ 來看看它與「實際最少步數」的落差到是多少：

坑洞數 T	理想下界 $\left\lceil \frac{6T}{T+1} \right\rceil$	實測步數	補償項	落差規律
2 洞	$\left\lceil \frac{12}{3} \right\rceil = 4$	4	0	完美運作
3 洞	$\left\lceil \frac{18}{4} \right\rceil = [4.5] = 5$	5	0	完美運作
4 洞	$\left\lceil \frac{24}{5} \right\rceil = [4.8] = 5$	6	1	產生差距
5 洞	$\left\lceil \frac{30}{6} \right\rceil = 5$	7	2	差距規律遞增
6 洞	$\left\lceil \frac{36}{7} \right\rceil = [5.14] = 6$	9	3	差距規律遞增

研究發現當 $T \geq 3$ 時，這個補償落差 C 呈現了非常完美的等差數列：0, 1, 2, 3。這剛好就等於 $T-3$ 。

把補償項 $C(T,S)$ 用 $T-3$ 帶入公式最終得出通式 ($S=3, T \geq 3$)

$$M(T,3) = \left\lceil \frac{2TS}{T+1} \right\rceil + (T-3)$$

驗證：當 $T=3$ 代入， $\left\lceil \frac{18}{4} \right\rceil + (3-3) = 5 + 0 = 5$ 。

當 $T=4$ 代入， $\left\lceil \frac{24}{5} \right\rceil + (4-3) = 5 + 1 = 6$

當 $T=5$ 代入， $\left\lceil \frac{30}{6} \right\rceil + (5-3) = 5 + 2 = 7$

當 $T=6$ 代入， $\left\lceil \frac{36}{7} \right\rceil + (6-3) = 6 + 3 = 9$

第二組為每洞四顆棋(階梯狀的高原現象)

我們用一樣的方法，破解 4 顆棋子時那不規則的「停滯期」。S=4 帶入，理想下界為 $\left\lceil \frac{8T}{T+1} \right\rceil$ 。我們從常態的 $T \geq 3$ 開始實測：

坑洞數 T	理想下界 $\left\lceil \frac{8T}{T+1} \right\rceil$	實測步數	補償項	落差規律
3 洞	$\left\lceil \frac{24}{4} \right\rceil = 6$	7	1	產生差距
4 洞	$\left\lceil \frac{32}{5} \right\rceil = [6.4] = 7$	8	1	差距停滯
5 洞	$\left\lceil \frac{40}{6} \right\rceil = [6.6] = 7$	8	1	差距停滯
6 洞	$\left\lceil \frac{48}{7} \right\rceil = [6.8] = 7$	9	2	差距遞增

實測數據出現了「階梯狀」的停滯期（高原現象）。這是因為 4 顆棋子蘊含的勢能較大，能透過跨區捕捉抵銷部分盤面擴張的劣勢。其補償項呈現 (1, 1, 1, 2...) 的階梯變化。觀察發現當初始棋子數 $S=4$ ，且棋盤 $T \geq 3$ 時，實際最少步數 $M(T,4)$ 與理想下界 $\left\lceil \frac{8T}{T+1} \right\rceil$ 之間存在固定的誤差，為了將誤差一般化，我們進行補償項的調整。

令結構補償項 $C(T) = M(T,4) - B(T,4)$ 。

將實測數據代入，當 $T \in \{3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$ 時，我們得出誤差數列 $C(T)$ 為：

$$C(T) = 1, 1, 1, 2, 2, \dots$$

觀察此一離散數列，其特徵為「數值每經過三個連續的 T 值才會發生一次躍升」。表示自變數每增加 3 次才會產生一個單位的函數值變化，因此我們確立該函數的基本型態必為將自變數除以 3 的形式 $= \left\lfloor \frac{T}{3} \right\rfloor$ ，當代入 $T = 4$ 時， $\left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor = 1$ ，與實測誤差值 1 不符合，表示函數的「躍升點」發生了過早偏移。雖然上取整函數抓住了階梯狀的趨勢，但為了讓模型能與實測數列完全吻合，我們發現必須在分子項中加入一個常數 K 。這個 K 值的作用就像是一個「位移修正」，用來調整公式的起始點，確保每一個階梯跳躍的時機都能與實際比賽的數據完美對齊。設 $C(T) = \left\lfloor \frac{k-T}{3} \right\rfloor$

依據邊界條件，當 $T=5$ 時，函數值必須仍維持在高原區間，即 $C(5) = 1$ 。

$$\text{推導不等式：} 0 < \frac{5-k}{3} \leq 1$$

$$0 < 5 - k \leq 3$$

解得 $2 \leq k < 5$ 。為了同時滿足 $T = 3$ 時 $C(3) = \left\lfloor \frac{3-k}{3} \right\rfloor = 1$ 的條件，我們取極值 $k = 2$ 。

將 $k = 2$ 代入，得出最終補償項 $C(T) = \left\lfloor \frac{T-2}{3} \right\rfloor$

代入驗證 $T=3, 4, 5$ 時，分子分別為 1, 2, 3，除以 3 取上界皆為 1，與表中補償項一致；當 $T = 6$ 時，分子為 4， $\left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor = 1$ ，與表中相符。

所以得出 $S = 4$ 的一般化公式：

$$M(T, 4) = \left\lfloor \frac{2TS}{T+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{T-2}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{8T}{T+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{T-2}{3} \right\rfloor, \text{ for } T \geq 3$$

驗證：當 $P = 4$ 時，代入公式得 $\left\lfloor \frac{32}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor = 7 + 1 = 8$ 步。

當 $P = 5$ 時，代入公式得 $\left\lfloor \frac{40}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{3} \right\rfloor = 7 + 1 = 8$ 步。

當 $P = 6$ 時，代入公式得 $\left\lfloor \frac{48}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor = 7 + 2 = 9$ 步。

第三組邊界條件每洞二顆棋：奇偶性帶來的效率差異

本研究針對初始棋子數固定為 2 顆 ($S=2$) 的曼卡拉賽局，探討了棋盤長度（單側洞數 T ）與最少獲勝步數 M 之間的內在規律。透過實驗數據的橫向對比，我們發現曼卡拉棋存在一個極具數學意義的轉折點：

（1）當 $S=2$ 時步數與距離的完美契合

在單側洞數較少的邊界條件下，數據展現了強烈的**非線性震盪**。這段期間，棋子數與空間的比例極高，玩家能頻繁地利用規則中的「連動進庫」來大幅削減回合數。例如，在 $T=2$ 的極限狀態下，棋子數與空間達成了完美共鳴，僅需 2 步即可清盤。此階段的步數變化主要受到「規則紅利」的影響，呈現出一種難以用簡單公式概括的跳躍規律，反映了賽局在侷限空間下的高度變幻性。

（2）完美共鳴與穩定步數增長 ($T \geq 4$)

在棋子數極度稀疏（始終只有 2 顆）且棋盤拉長的情況下，多出一個坑洞就意味著物理距離增加。當空間優勢已被用盡，每增加一個坑洞，玩家就必須多花費剛好 1 步數來處理這段多出來的「路程」。

（3） $T=3$ 的效率斷層：消失的連動優勢

觀察數據可以發現 $T=3$ 是整個系統的效率斷層。當單側坑洞數僅增加一格，步數卻由 2 步猛增至 5 步。主因在於當 $d=3$ 時，初始棋子數 $S=2$ 已無法支撐首手直接入庫，這導致了連動機制的崩解。

在這種配置下，玩家被迫採取「短傳接力」的策略，必須先投入額外回合處理前置位移，將棋子逐步往前推進。這些動作本身不具備得分效益，僅是為了克服空間距離所付出的搬運成本。正是因為缺乏了關鍵的入庫連動，才使得 $T=3$ 的清盤效率出現了斷崖式的下降。

柒、 研究結果

一、 贏球策略與落點控制？

在分析曼卡拉的最少步數時，我們發現獲勝的靈魂就在於那顆「最後落下的棋子」。

只要能精準預測落點，就能從被動的搬運轉為主動的進攻。我們總結出兩項核心策略：

- (一)、「進庫再玩」的連鎖反應：這是賽局中最具侵略性的技巧。透過路徑規劃，讓棋子播種的終點剛好落在寶庫中，這等於為自己贏得了一次額外的行動機會。高明的玩家會利用這種連動，像接力賽一樣把後方的棋子源源不絕地送入庫中，大幅壓縮獲勝所需的總步數。
- (二)、靈活的「完賽心理戰」：遊戲的結束時機是一把雙刃劍。當我們發現自己手上的棋子數比對方少時，絕對不能急著清空坑洞，而是要儘量分散棋子，尋求反擊的機會。相對地，如果我們已經大幅領先，最聰明的做法就是找出最快路徑清空盤面，不給對手任何翻盤的空間。這種對「結束時機」的精準拿捏，往往才是最終勝出的關鍵。

二、 空間與棋子數的效應？

最少獲勝步數並非單純的算術累加，而是呈現非線性的階梯狀變化

- (一)、最佳效率臨界點：當最遠坑洞距離 d 剛好等於初始棋子數 S 時能達成完美共振，觸發連續進庫。
- (二)、回流與溢出效應：當 S 接近單圈長度時，會產生回流效應補充己方資源，若 S 超過臨界點會產生溢出現象，將控制權轉移給對手，導致所需步數增加。

三、 找出每邊三個坑洞，每洞 2~4 顆，最少步數？

$$M(3,S)=5+\max(0,\left\lceil\frac{2T}{T+1}\times(S-3)\right\rceil)=5+\max(0,\left\lceil1.5\times(S-3)\right\rceil)$$

四、 找出每邊四個坑洞，每洞 2~4 顆，最少步數？

$$M(4,S) = \left\lceil \frac{2T}{T+1} \times S \right\rceil + 1 = \lceil 1.6 \times S \rceil + 1$$

五、 找出每洞 3 顆，每邊 2~6 個坑洞，最少步數？

$$M(T,3) = \left\lceil \frac{2TS}{T+1} \right\rceil + (T-3)$$

六、 找出每洞 4 顆，每邊 3~6 個坑洞，最少步數？

$$M(T,4) = \left\lceil \frac{2TS}{T+1} \right\rceil + \left\lceil \frac{T-2}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{8T}{T+1} \right\rceil + \left\lceil \frac{T-2}{3} \right\rceil$$

捌、 參考資料

- 1、南一書局（2020）。《國中數學第二冊：數與代數的運算》。
- 2、取整函數（2025 年 12 月 5 日）。載於《維基百科》。<https://zh.wikipedia.org/wiki/取整函數>
- 3、Ancient Pages. (2024, February 2). *Ancient mancala game boards carved into rock in Kenya*. <https://www.ancientpages.com/2024/02/02/ancient-mancala-game-boards-carved-into-rock-kenya/>