

花蓮縣第 66 屆國民中小學科學展覽會
作品說明書

科 別：數學科

組 別：國中 B 組

作品名稱：從 2×2 到 4×4 ：魔術方塊解題步數與穩定性之探討

關 鍵 詞：步數、標準差、魔術方塊

編 號：

目錄

作品名稱：	1
摘要：	1
壹、前言：	1
研究動機：	1
研究目的：	2
文獻回顧：	2
貳、研究設備及器材：	3
參、研究過程或方法：	3
肆、研究結果	16
伍、討論	19
陸、結論	20
柒、參考文獻資料	20

圖片來源目錄

圖一 2x2 階解法 示意圖：給流程內容透過繪圖軟體+AI 生成	5
圖二 3x3 階解法 示意圖：給流程內容透過繪圖軟體+AI 生成	7
圖三 4x4 階解法 示意圖：給流程內容透過繪圖軟體+AI 生成	8
圖四 不同階數 50 次實驗數據分析：以撰寫 python 程式碼跑出.....	16
圖五 不同階數之解題步數盒狀圖：以撰寫 python 程式碼跑出.....	17
圖六 階數 v.s 平均步數 分析：以撰寫 python 程式碼跑出	17
圖七 階數 v.s 平均時間 分析：以撰寫 python 程式碼跑出	18
圖八 步數之標準差 分析：以撰寫 python 程式碼跑出.....	18
圖九 步數之變異數 分析：以撰寫 python 程式碼跑出.....	18

作品名稱：

從 2x2 到 4x4：魔術方塊解題步數與穩定性之探討

摘要：

本研究以 2x2、3x3 與 4x4 魔術方塊為對象，探討其解題步數與解題穩定性之差異。研究假設隨著魔術方塊階數提升，其解題步數之期望值將增加，且解題結果之分散程度亦會隨之擴大。為驗證此假設，本研究針對各階魔術方塊進行 50 次隨機打亂與復原實驗，記錄解題步數與時間，並以平均數、變異數、標準差與四分位距等統計方法進行分析。

研究結果顯示，隨著階數增加，平均解題步數呈現非線性上升趨勢，且變異數與標準差亦顯著增加，顯示解題結果由集中趨於分散。此外，4x4 魔術方塊出現 Parity 現象，反映其結構與解題邏輯已超越 3x3 模型。解題時間亦隨階數提升而顯著增加，顯示高階魔術方塊在認知與操作上具有較高負荷。

本研究透過統計分析與視覺化圖表，驗證魔術方塊階數與解題複雜度之關聯，並指出其問題本質由低變異系統轉變為高變異複雜系統。

壹、前言：

研究動機：

魔術方塊看似為益智玩具，實際上蘊含豐富的排列組合與結構轉換概念。以經典的3x3魔術方塊為例，其所有可能狀態數量極為龐大，且已被證明存在最少步數上限，即God's Number，顯示其背後具有嚴謹的數學結構。然而，多數相關研究多聚焦於特定階數（如3x3）之最佳解法或速度提升，較少從「整體分布」與「期望值」角度，系統性比較不同階數魔術方塊之解題複雜度。

隨著魔術方塊階數提升，其內部結構由單純的角塊與邊塊，擴展至包含中心塊與配對機制，使解題過程不再僅是排列問題，更涉及多層次的結構重組與限制條件。特別是在4x4以上魔術方塊中，會出現如奇偶錯位（parity）等特殊情況，顯示其解題機制與低階魔方存在本質差異。然而，這些結構差異如何影響整體解法步數，是否呈現規律性的成長趨勢，仍缺乏系統性的量化分析。

因此，本研究嘗試從「隨機狀態」出發，結合實驗數據與統計方法，探討不同階數魔術方塊之解法步數期望值與分布特性，並進一步分析其與結構複雜度之關聯。期望透過此研究，建立一個由經驗數據支持的複雜度模型，將魔術方塊由操作層次提升至數學分析層次，深化對其內在規律之理解。

研究目的：

- 一、建立不同階數魔術方塊解題步數之期望值模型。
- 二、分析解題步數之分布情形，並比較其變異數與標準差。
- 三、探討魔術方塊階數與解題複雜度之關係。
- 四、驗證階數增加是否導致解題結果由集中分布轉為分散分布。
- 五、透過統計與視覺化分析，說明魔術方塊由低變異系統轉變為高變異複雜系統之現象。

文獻回顧：

魔術方塊自1974年由Ernő Rubik發明以來，已成為結合數學與益智遊戲的重要研究對象。過去研究多集中於3x3魔術方塊之結構與最佳解法，其中最具代表性的成果為最少步數上限之確立，即God's Number，證明任一狀態皆可於20步內還原，顯示其解空間具有高度規律性與可分析性。

在解法方面，目前常見方法如CFOP已廣泛應用於速解領域，相關研究多著重於降低步數或提升速度，並以實際操作與經驗統計為主。然而，這類研究多以單一階數（特別是3x3）為核心，較少進一步比較不同階數魔術方塊之間的結構差異與解題複雜度。

在科學展覽相關作品中，亦可見部分研究以魔術方塊為主題，例如某些屆次全國科展作品曾探討「不同解法之步數效率比較」或「魔術方塊還原步數之統計分析」，多以實測方式比較不同解法或操作熟練度對解題時間與步數的影響。然而，這類研究多偏向操作層面或經驗統計，較少從「隨機狀態下的整體分布」與「期望值」角度，建立跨階數的系統性分析模型。

此外，對於高階魔術方塊（如4x4），其結構因加入中心塊與邊塊配對機制，並可能出現奇偶錯位（parity）等特殊情況，使其解題過程不再僅為單純排列問題。然而，目前相關研究

多著重於解法步驟說明，對於這些結構特性如何影響整體解題步數分布與期望值，仍缺乏量化與比較分析。

綜合上述，本研究將補足過去研究較少觸及之面向，透過建立隨機模型與統計分析方法，系統性探討不同階數魔術方塊之解法步數期望值與分布特性，並進一步分析其與結構複雜度之關聯，以期建立更完整之數學分析架構。

貳、 研究設備及器材：

一、記錄工具（紙本紀錄表、筆）

二、計算工具（計算機、Excel 或 Google 試算表）

三、2x2 至 4x4 魔術方塊

參、 研究過程或方法：

一、研究對象

本研究以不同階數之魔術方塊作為研究對象，包含 2x2、3x3、4x4 與 5x5 四種階數。透過比較不同階數魔術方塊在解題過程中的步數差異，探討其結構複雜度與解題難度之變化。

二、研究模型建立

為模擬一般魔術方塊被打亂的情形，本研究採用隨機轉動方式建立實驗模型。每次實驗皆以隨機轉動魔術方塊 50 步作為打亂方式，使其進入隨機狀態。完成打亂後，再進行還原操作並記錄以下三項數據。

(一) 解法步數（Move Count）：紀錄從開始復原到完成六面所使用的總旋轉步數。

(二) 特殊情況紀錄（Parity）：只有 4x4 會出現特殊情況。

類型	說明
None	無特殊情況
OLL Parity	單一邊塊翻轉
PLL Parity	兩組邊塊交換

Double Parity	同時出現 OLL 與 PLL
---------------	----------------

(三) 特殊時間 (秒)：測量從開始解到完成六面的時間。

(四) 每一階魔術方塊皆進行 50 次實驗，以累積足夠樣本數，提升統計分析之可靠性。

三、定義研究過程中的計算

(一) 定義設階魔術方塊進行 $n = 50$ 次實驗，步數資料為 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{49}, x_{50}$ ，時間資料為 $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{49}, y_{50}$

(二) 平均數計算方式分別為： $\bar{x} = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} x_i$ ， $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{50} y_i$

(三) 標準差計算方式分別為： $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$

(四) 變異數計算方式分別為： $\sigma_x^2 = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} (x_i - \bar{x})^2$ ， $\sigma_y^2 = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} (y_i - \bar{y})^2$

(五) 變異系數計算方式分別為： $CV_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}}$

(六) 中位數的定義：將資料排序後，第 25 個及第 26 個的數值平均

(七) 最大值的定義： $\max\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{49}, x_{50}\}$

(八) 最小值的定義： $\min\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{49}, x_{50}\}$

(九) 全距的定義：將資料最大值與最小值之差，用來表示整體分布範圍

(十) 第一四分位數的定義 (Q1)：將資料排序後，第 13 個數值

(十一) 第三四分位數的定義 (Q3)：將資料排序後，第 38 個數值

(十二) 四分位距的定義： $Q3 - Q1$

四、研究過程與方法

(一) 魔術方塊解法限制：

為避免不同解法造成實驗結果差異，本研究在實驗過程中統一採用固定解法進行還原操作。其中 2x2、4x4 與 5x5 魔術方塊採用初學者解法進行還原，而 3x3 魔術方塊則可採用常見的 CFOP 解法。透過統一解題策略，以降低操作方式差異對實驗結果的影響，使研究結果更具比較性與客觀性。

1. 2x2 階解法：

本研究採用基礎層先法 (Layer First Method) 作為 2x2 魔術方塊之統一解法。該方

法首先完成一個完整面，再透過特定公式調整剩餘角塊的位置與方向。此方法步驟明確且適合初學者，能降低操作差異對實驗結果的影響，因此作為本研究測量解題步數與時間之標準解法。解題流程主要分為三個階段：

(1) 完成第一面

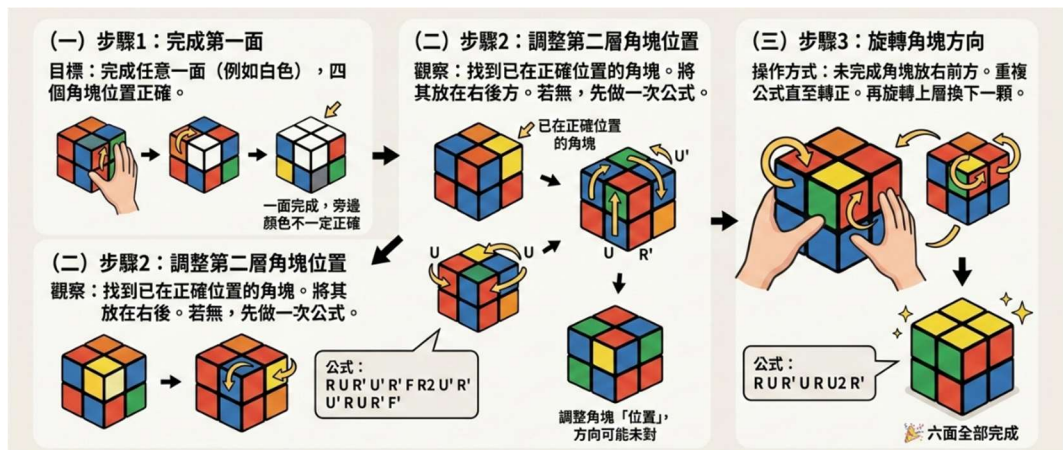
- 目標：是先完成任意一面（例如白色面），並且讓四個角塊的位置正確。
- 做法：找到白色角塊，透過旋轉讓四個角塊組成完整白色面
- 特徵：一面完成，旁邊顏色不一定正確

(2) 調整第二層角塊位置，此時只剩下上層四個角塊未完成。

- 目標：找到已經在正確位置的角塊，將它放在右後方，若沒有正確位置的角塊，先做一次公式。
- 公式： $R\ U\ R'\ U'\ R'\ F\ R^2\ U'\ R'\ U'\ R\ U\ R'\ F'$
- 作法：調整角塊「位置」，但角塊方向可能還沒對

(3) 旋轉角塊方向

- 目標：最後一步是讓上面四個角塊方向正確。
- 公式： $R\ U\ R'\ U\ R\ U^2\ R'$
- 作法：將未完成的角塊放在右前方，重複公式直到角塊轉正，再旋轉上層



圖一 2x2 階解法 示意圖

2. 3x3 階解法：

本研究進一步將「基礎層先法」應用於 3x3 魔術方塊。相較於 2x2 結構，3x3 增加了「中心塊固定」與「邊塊處理」的變因。實驗設計上，維持與 2x2 相同的「先處

理底層、再處理頂層角塊位置、最後修正方向」之邏輯框架。此一致性的操作標準，有助於量化分析在不同階數下，公式長度（步數）與解題複雜度之間的線性關係。

透過固定解法，可確保不同階數魔術方塊在比較時具有一致的操作基準，進而探討階數增加對人類記憶負荷與操作時間之影響。解題流程主要分為三個階段：

(1) 完成底層（第一層）

- 目標：完成底面顏色（如白色）且底層側面顏色需正確（成 T 字型）。
- 作法：
 - 組十字：先在頂面（黃色中心）組成白色花瓣，再轉到底面形成白色十字。
 - 置角塊：找到白色角塊，對準顏色後使用公式 $R U R' U'$ 將其置入。
- 特徵：底面完好，第一層側面顏色與中心塊齊色。

(2) 完成第二層（中層）與頂層十字

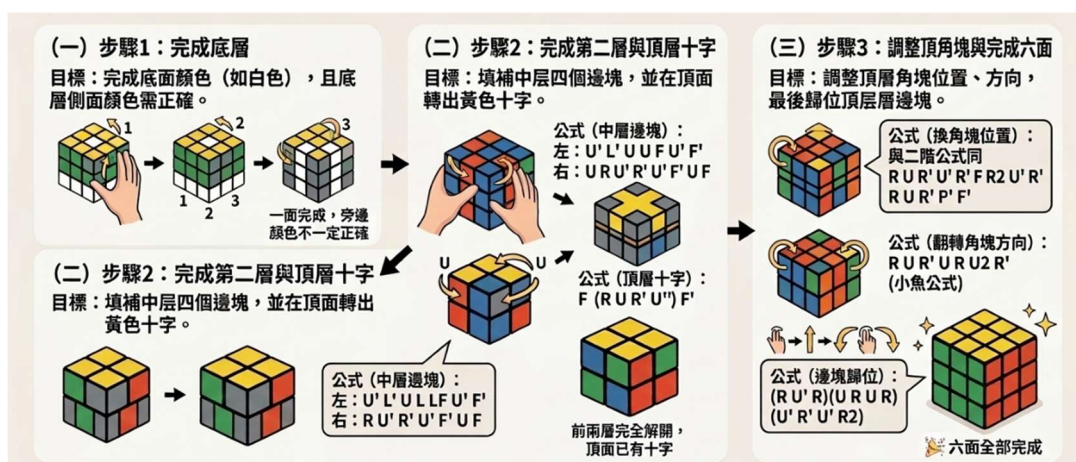
- 目標：填補中層四個邊塊，並在頂面轉出黃色十字。
- 作法：
 - 中層邊塊：找到不含黃色的邊塊，對齊側面顏色，使用中層公式（左： $U' L' U L U F U' F'$ / 右： $U R U' R' U' F' U F$ ）。
 - 頂層十字：使用公式 $F (R U R' U') F'$ ，重複直到頂面出現黃色十字。
- 特徵：前兩層完全解開，頂面已有十字。

(3) 調整頂層角塊與完成六面

- 目標：讓頂層四個角塊位置正確並翻轉方向，最後歸位頂層邊塊。
- 做法：
 - 換角塊位置：與二階步驟 2 相似，利用 $R U R' U' R' F R^2 U' R' U' R U' R' F'$ （或是基礎法中的換角公式）調整位置。
 - 翻轉角塊方向：使用公式 $R U R' U R U^2 R'$ （小魚公式）直到頂面

全黃。

- 邊塊歸位：若邊塊位置不對，使用 $(R\ U' R)(U\ R\ U\ R)(U' R' U' R^2)$ 完成。



圖二 3x3 階解法 示意圖

3. 4x4 階解法：

本研究最終將實驗範疇擴展至 4x4 魔術方塊。四階魔方之解題邏輯體現了演算法中的「化歸思想」，即透過「降階法」將高階問題轉化為已知的 3x3 基礎模型。實驗數據顯示，4x4 的解題變因除了傳統的層先邏輯外，新增了「中心塊重建」與「特殊情況處理（Parity）」兩大變數。解題流程主要分為三個階段：

(1) 組中心塊與邊塊對齊（降階核心）

- 目標：在六個面各組成 2x2 的中心塊，並將 12 組邊塊「兩兩配對」。
- 做法：
 - 中心塊歸位：觀察顏色順序（白底黃頂，前紅後橘，左青右藍），將同色中心塊組在一起。
 - 邊塊配對（Pairing）：找到兩個顏色相同的邊塊，對齊後使用公式將其合併。公式： $Uw\ R\ U\ R'\ F\ R'\ F'\ R\ Uw'$
- 特徵：
 - 中心 2x2 區域顏色完成。
 - 所有的邊塊都已成對，此時方塊看起來像是一個「大型三階」。

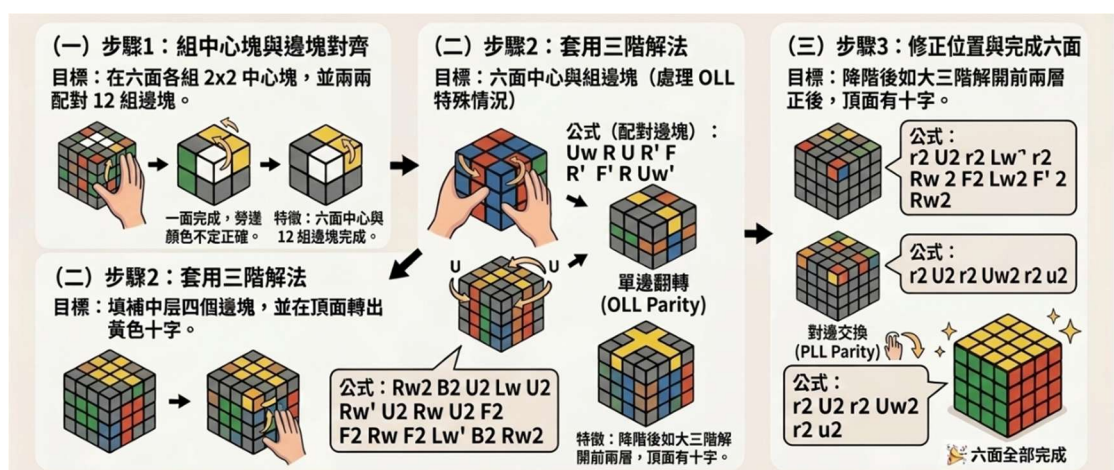
(2) 套用三階解法（處理 OLL/PLL 單項情況）

- 目標：依照三階的「層先法」邏輯進行解題，並處理四階特有的「特殊情況」。
- 作法：
 - 特殊情況（Parity）：若遇到三階不可能出現的狀態（如：只有一個邊塊沒翻正，或只有兩個角塊位置不對），需使用長公式排解。
 - 公式（翻轉單邊）： $Rw2\ B2\ U2\ Lw\ U2\ Rw'\ U2\ Rw\ U2\ F2\ Rw\ F2\ Lw'\ B2\ Rw2$
- 特徵：
 - 成功將四階邏輯簡化為三階邏輯。
 - 處理完特殊情況後，方塊進入準完成狀態。

(3) 修正方向與完成六面

- 目標：確保頂層角塊與邊塊的位置、方向完全正確。
- 作法：
 - 套用三階步驟 3 的「小魚公式」與「換角公式」。
 - 若最後剩下兩組對邊位置不對，使用 PLL Parity 公式。

公式： $r2\ U2\ r2\ Uw2\ r2\ u2$



圖三 4x4 階解法 示意圖

(二) 實驗數據紀錄

本研究將三種不同階數之魔術方塊（ 2×2 、 3×3 、 4×4 ）進行比較。

每次實驗皆先以隨機轉動 50 步打亂，再依照固定解法將魔術方塊復原，並重複 50 次實驗。每次實驗皆記錄以下三項數據。

1. 2×2 階

解題步數	特殊情況紀錄	解題時間
25	None	27
24	None	21
22	None	40
36	None	20
32	None	26
25	None	39
25	None	37
33	None	22
24	None	32
33	None	31
24	None	37
30	None	30
32	None	22
32	None	32
29	None	38
26	None	22
26	None	33
36	None	37
30	None	23

30	None	36
38	None	24
38	None	35
31	None	27
24	None	24
27	None	26
34	None	34
24	None	38
22	None	27
24	None	28
37	None	33
33	None	34
25	None	30
36	None	25
36	None	21
24	None	33
23	None	20
36	None	37
28	None	30
38	None	21
24	None	27
29	None	39
38	None	26
26	None	34
25	None	36

24	None	29
31	None	37
30	None	37
32	None	36
23	None	28
30	None	37

2. 3×3 階

解題步數	特殊情況紀錄	解題時間
86	None	84
122	None	71
120	None	114
122	None	118
102	None	118
107	None	86
109	None	88
121	None	72
99	None	87
95	None	83
123	None	116
125	None	119
110	None	83
98	None	111
120	None	97
117	None	118

125	None	108
118	None	70
126	None	88
117	None	76
123	None	93
85	None	71
100	None	106
119	None	112
101	None	104
127	None	103
106	None	105
89	None	74
117	None	112
100	None	82
112	None	116
88	None	76
93	None	87
120	None	111
100	None	101
95	None	94
103	None	112
88	None	73
118	None	102
123	None	95
122	None	75

105	None	112
127	None	90
89	None	86
100	None	80
124	None	89
92	None	79
98	None	101
90	None	72
95	None	115

3. 4×4 階

解題步數	特殊情況紀錄	解題時間
260	None	215
298	Double	203
240	None	319
261	None	220
229	PLL	266
278	None	191
210	None	340
239	PLL	349
215	None	296
284	Double	351
233	PLL	242
246	OLL	194
258	None	325

317	OLL	297
257	OLL	329
316	None	192
230	Double	196
254	None	354
277	OLL	291
235	Double	340
240	None	221
272	None	208
204	PLL	200
222	None	301
298	PLL	356
285	OLL	295
195	None	238
205	None	188
250	OLL	304
311	PLL	204
295	None	193
293	Double	243
298	OLL	298
215	None	318
232	PLL	303
287	None	247
298	PLL	304
205	None	192

230	None	200
207	None	210
200	None	287
256	PLL	260
266	Double	198
244	None	213
284	None	292
192	OLL	349
217	OLL	249
257	None	244
298	OLL	180
303	None	289

(三) 數據分析比較

1. 解題步數

類型	2×2 階	3×3 階	4×4 階
平均數	29.28	108.22	253.92
標準差	5.016134	13.29254	35.46087
變異數	25.1616	176.6916	1257.474
變異係數	0.171316	0.122829	0.139654
中位數	29.5	108	255
最大值	38	127	317
最小值	22	85	192
全距	16	42	125
第一四分位數	14	98	229

第三四分位數	33	122	287
四分位距	19	24	58

2. 解題時間

類型	2x2 階	3x3 階	4x4 階
平均數	30.36	94.7	261.88

3. 4x4 階特殊情況出現機率

類型	None	OLL Parity	PLL Parity	Double Parity
4x4 階	60%	20%	15%	5%

4. 期望值

為分析解題步數之整體趨勢，本研究以期望值（Expected Value）作為主要指標，

$$\text{定義如下：} E(x) = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} x_i$$

期望值代表在多次實驗下的平均結果，可視為解題步數之預測值。本研究透過比較不同階數之期望值，分析其成長趨勢。

肆、研究結果

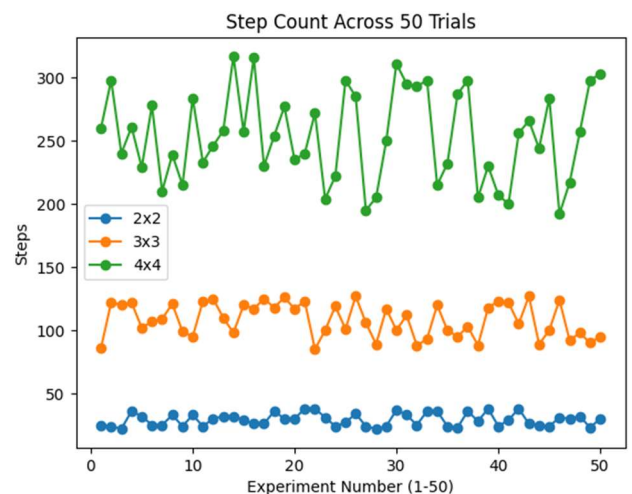
一、魔術方塊在不同階數下 50 次實驗數據分析

(一) 2x2 魔術方塊之曲線變化平緩，數值多集中於約 25 至 35 步之間，顯示每次解題結果差異不大，具有高度穩定性。

中於約 25 至 35 步之間，顯示每次解題結果差異不大，具有高度穩定性。

(二) 3x3 魔術方塊之曲線出現中度波動，步數約落於 90 至 125 步之間，顯示解題過程受到部分因素影響，導致結果出現一定程度的變化。

(三) 4x4 魔術方塊之曲線波動最為劇烈，步數分布範圍廣（約 190 至 320 步），且在不同實驗間呈現明顯起伏，顯示其解題過程高度依賴當次狀態，具有較高的不確定性與複雜度。



圖四 不同階數 50 次實驗數據分析

此外，三條曲線隨階數增加呈現整體「向上分離」的現象，顯示不同階數之間解題步數具有明顯層級差異。

二、魔術方塊在不同階數下塊解題步數之分布情形

(一) 首先，2x2 魔術方塊之箱體最小，顯示其四分位距（IQR）最小，代表解題步數變異程度低，解題過程相對穩定，且上下鬚（最大值與最小值）距離短，顯示極端情況較少。

(二) 其次，3x3 魔術方塊之箱體較 2x2 明顯擴大，顯示解題步數變異增加，且中位數約落在 100 步左右，顯示其解題複雜度與不確定性皆高於 2x2。

(三) 最後，4x4 魔術方塊之箱體最大，且上下鬚範圍最廣，顯示其解題步數分布最分散，變異程度最高。此外，最大值與最小值差距顯著，代表不同實驗之間差異大，顯示高階魔術方塊解題穩定性較低。

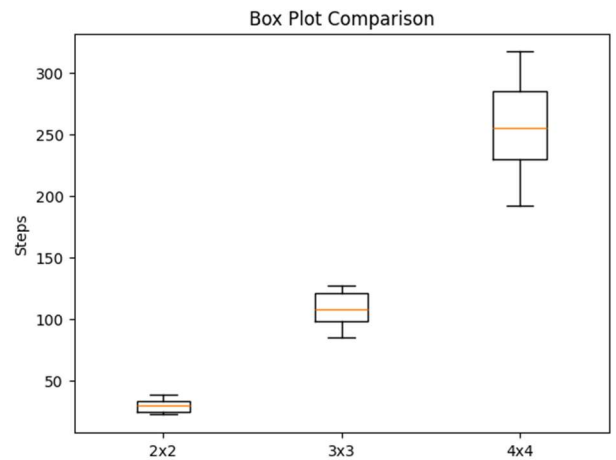
隨著魔術方塊階數增加，解題步數的變異程度明顯提升，顯示問題複雜度與不確定性同步增加。

三、不同階數的魔術方塊對於平均時間、平均步數的相關分布

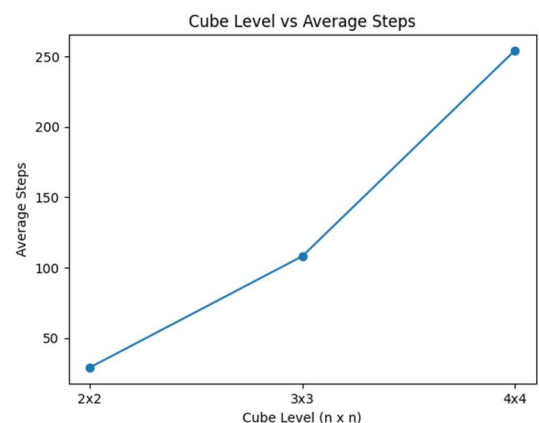
(一) 階數 v.s 平均步數

由圖觀察，隨著魔術方塊階數由 2x2 提升至 4x4，平均解題步數呈現明顯上升。其中，從 2x2 到 3x3 的增加幅度已相當顯著，而從 3x3 到 4x4 則呈現更大幅度的成長。

結果顯示，解題步數成長並非線性，而可能呈現加速上升的趨勢，反映出高階魔術方塊在結構與解題過程上的複雜度大幅提升。



圖五 不同階數之解題步數盒狀圖

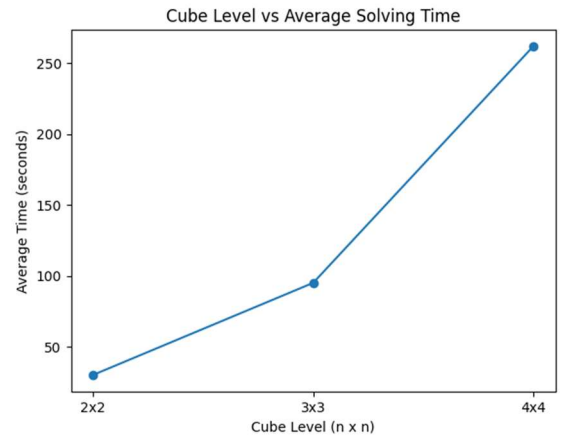


圖六 階數 v.s 平均步數 分析

(二) 階數 v.s 平均時間

由圖觀察，隨著魔術方塊階數增加，平均解題時間顯著上升，且成長幅度大於解題步數的增加幅度。特別在 4x4 魔術方塊中，解題時間出現大幅提升。

此現象顯示，解題時間不僅受到步數影響，亦與解題過程中的判斷與操作複雜度有關，反映人類在高階魔術方塊解題時的認知負荷增加。

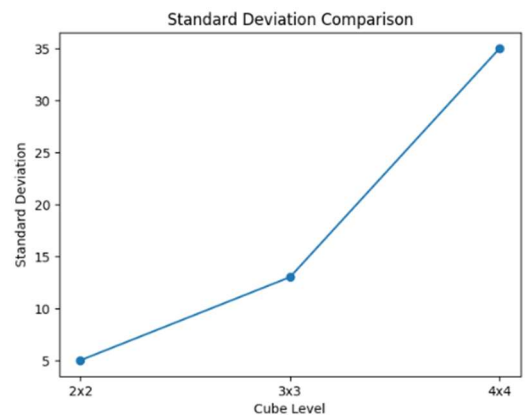


圖七 階數 v.s 平均時間 分析

四、一維數據分析

(一) 標準差：

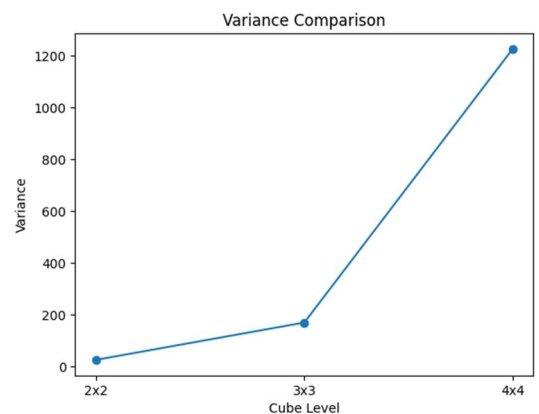
由標準差圖可觀察，隨著魔術方塊階數提升，標準差逐漸增加，顯示解題步數偏離平均值的程度隨之上升。顯示階數越高，解題步數的不穩定性越高。



圖八 步數之標準差 分析

(二) 變異數：

由變異數圖可觀察，隨著魔術方塊階數增加，變異數呈現顯著上升趨勢。其中 4x4 魔術方塊之變異數遠高於 2x2 與 3x3，顯示隨著階數增加，資料分散程度越大。



圖九 步數之變異數 分析

(三) 變異係數：

1. 2x2 變異比例較高（因步數少，小變動影響大）
2. 3x3 相對最穩定
3. 4x4 雖然絕對變異大，但相對變異略低於 2x2

伍、 討論

一、Q：魔術方塊階數增加，是否會影響解題步數？

A：本研究結果顯示，隨著魔術方塊階數由 2x2 提升至 4x4，平均解題步數呈現快速上升趨勢，且增加幅度逐漸擴大，顯示其成長並非單純線性關係。特別是在 3x3 與 4x4 之間，步數增加超過兩倍，反映出高階魔術方塊在結構上已產生質變，而不僅是元素數量的增加。

二、Q：魔術方塊階數增加，是否會影響解題穩定性？

A：由標準差與四分位距分析結果可知，隨著階數提升，解題步數的分布逐漸擴散，顯示解題過程的不確定性增加。此現象可能與高階魔術方塊需進行中心塊組合與邊塊配對有關，使解題過程產生更多可能路徑與變化，進而降低整體穩定性。

三、Q：高階魔術方塊是否具有不同於低階的特殊結構問題？

A：研究發現，4x4 魔術方塊中約有 40% 的情況會出現 Parity 現象，此現象在 3x3 魔術方塊中並不存在，需透過額外公式進行修正。此結果顯示高階魔術方塊在解題邏輯上已超越傳統排列模型，涉及更複雜的結構限制與轉換規則。

四、Q：魔術方塊階數是否影響解題時間？

A：研究結果顯示，解題時間隨階數提升而顯著增加，且其成長幅度大於解題步數。推測其原因為高階魔術方塊在解題過程中需進行更多判斷與策略選擇，導致認知負荷增加，進而延長整體解題時間。

五、Q：從圖表分析中可以觀察到哪些整體趨勢？

A：綜合箱型圖與折線圖可發現，隨著階數提升，平均步數呈現明顯上升趨勢；箱型圖顯示資料分布範圍逐漸擴大，代表變異程度增加；折線圖則顯示單次實驗之波動更加明顯。上述結果顯示，階數提升不僅增加解題步數，也使解題結果更不穩定。

六、Q：是否可用統計方法驗證解題複雜度的變化？

A：透過變異數與標準差之量化分析可知，隨著階數增加，解題步數之分散程度顯著上升，顯示資料由集中分布逐漸轉為分散分布。此結果可視為系統性質轉變的證據，說明魔術方塊問題由低變異系統逐步轉變為高變異複雜系統。

陸、 結論

綜合本研究結果可知，魔術方塊階數與解題步數之間呈現明顯正相關，且其成長趨勢並非單純線性，而可能呈現加速上升的情形。隨著階數由 2x2 提升至 4x4，解題步數大幅增加，顯示高階魔術方塊在結構與解題過程上已產生質變，而不僅是元素數量的增加。

進一步分析解題步數的分布情形，可發現隨著階數提升，資料的變異程度顯著增加。無論從標準差、變異數或四分位距來看，皆顯示高階魔術方塊之解題結果較為分散，代表其解題過程具有較高的不確定性與複雜度。此外，透過變異係數分析亦可發現，不同階數在相對變異程度上仍存在差異，顯示解題穩定性不僅受到步數多寡影響，也與魔術方塊本身的結構特性密切相關。

在解題過程中，4x4 魔術方塊出現之 Parity 現象為其重要特徵之一，該現象在 3x3 魔術方塊中並不存在，顯示高階魔術方塊在解題邏輯上已超越傳統模型，需透過額外演算法進行修正。此一結果進一步說明，隨著階數提升，問題本質已由單純排列問題轉變為包含結構限制的複雜系統。

此外，研究亦發現解題時間隨階數顯著增加，且其成長幅度大於解題步數，推測原因為高階魔術方塊在解題過程中需進行更多判斷與策略選擇，導致認知負荷提升，進而影響整體解題效率。

最後，透過折線圖、箱型圖與分布分析等視覺化方法，本研究進一步驗證魔術方塊由低階至高階之轉變，不僅體現在解題步數的增加，更反映於解題結果由集中分布轉為分散分布，顯示其問題本質由低變異系統轉變為高變異複雜系統。本研究所建立之分析方法，亦可作為探討其他複雜系統之參考依據。

柒、 參考文獻資料

- 一、lhrbld.tw (n.d.)。2x2 魔術方塊基礎解法。取自 <https://lhrbld.tw/2x2-basic/>
- 二、World Cube Association (n.d.)。世界魔術方塊協會規則與解法說明。取自 <https://www.worldcubeassociation.org>

- 三、國家教育研究院（n.d.）。統計學名詞解釋（平均數、變異數、標準差）。取自
<https://terms.naer.edu.tw>
- 四、吳明隆（2014）。統計學：SPSS 操作與應用。臺北市：五南圖書出版公司。
- 五、林惠玲、陳正倉（2018）。統計學概論。臺北市：雙葉書廊。