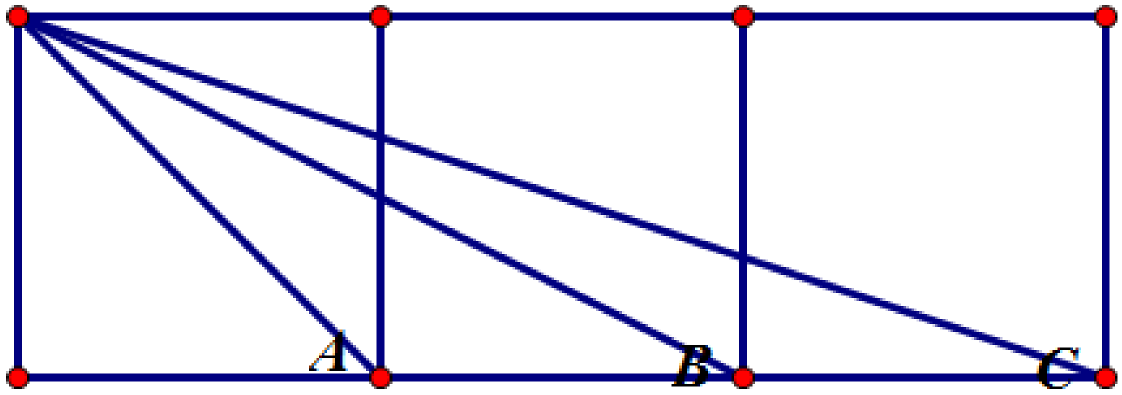
花蓮縣第　58　屆國民中小學科學展覽會

作品說明書



∠A＋∠B＋∠C＝？

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：三角形邊角關係與相似形之探究

關 鍵 詞：相似形、三角函數、畢氏定理

編　　號：

（由教育處統一編列）

摘要

我們先用相似形、直角三角形、甚至是三角函數等多種方法來解決這個問題，接下來討論什麼時候可以用相似形來解這個問題，並且也用數學軟體 GSP 去驗證是否有相似，再來，把問題推廣到角度不是 45 度的狀況下是否也可以用相似形來解題，經過了我們的猜想以及證明之後我們終於導出了公式，後來也探討出了 45 度以及不是 45 度時分成三個角以上的公式，最後我們去綜合之前的研究，並且使用了一些定義以及迭代式探討出了 45 度分成 n 個角的公式、90 度分成 n 個角的公式以及不是特殊角時分成 n 個角的公式，發現了 90 度時的公式意外的有規律，而且公式也都比較簡單，我們推測是因為在 90 度時有一些線段的長度會變為 0，所以公式中有一些部分就也會變成 0，導致一些部分不見了。

壹、研究動機

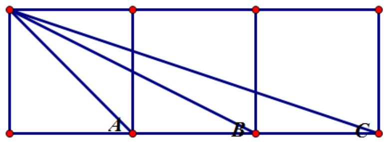


圖 一

我在升國中一年級的暑假，參加校內舉辦的數學營隊，裡面有談到一個角度和的問題，讓我想知道這一題會不會有其他解法？如果是不同角度的話，會有解嗎，解法又是如何？最後我想把題目延伸，如果我把角度和個數增加，希望能找到一個模式去解決這種問題。這個問題的題目如圖 一：$\angle A+\angle B+\angle C=$？營隊的老師說這一題曾經出現在高中的段考試題，但並非求角度和，他要我們大膽猜測答案是多少，用眼睛睛看應該是 90 度，後來運算出答案的結果的確是 90 度，課堂上老師用一種解法給我們看，他希望我們自己回家試試看有沒有其他解，也可以用 GSP 軟體來驗證自己的答案對不對，於是我展開了我們的研究。

貳、研究目的

(一) 探討這一個題目的其他解法。

(二) 探討這一題使用相似形解法是否可以推廣到其他角度？

(三) 探討這題目拆成三個角以上的情形為何？

參、研究設備及器材

Word、Gsp

肆、研究過程或方法

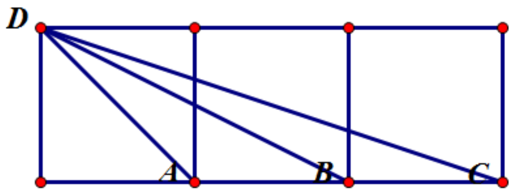


圖 二

一、探討這一題的解法有下列幾種：

(一) 用相似形來解題（圖 二）

證明過程 ：此圖形為三個正方形組成，因此我們不失一般性假設 $\overline{AB}=1$ 再透過畢氏定理將得到下列邊長：

$$\overline{AD}=\sqrt{2}、\ \overline{BD}=\sqrt{5}、\ \overline{AC}=2、\ \overline{CD}=\sqrt{10}$$

對於 $\triangle$ABD 與 $\triangle$ADC 的邊長比如下：

1. $\triangle$ABD：$\overline{AB}:\overline{BD}:\overline{AD}=1:\sqrt{5}:\sqrt{2}$

2. $\triangle$ADC：$\overline{AD}:\overline{DC}:\overline{AC}=\sqrt{2}:\sqrt{10}:2=1:\sqrt{5}:\sqrt{2}$

經由 1、2 得知 $\triangle$ABD $\backsim\triangle$ADC（SSS）。

$\therefore\ \angle C=\angle ADB$與外角定理將得到$\angle B+\angle C=\angle A$ 且$\angle A=45°$

故得證 $\angle A+\angle B+\angle C=90°$。

(二) 利用等腰直角三角形來解題（圖 三）

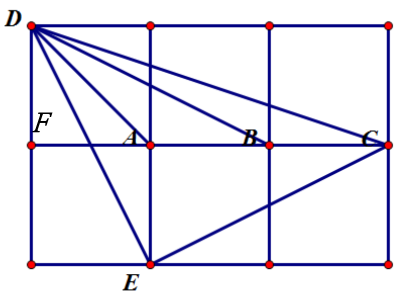


圖 三

證明過程：先將三個正方形做延伸並連接$\overline{CE}$ 與 $\overline{DE}$ 兩直線如圖三，此圖形皆為正方形組成，因而不失一般性假設 $\overline{AB}=1$ 與畢氏定理將得到下列邊長：

$$\overline{DE} = \overline{EC} = \sqrt{5} \text{ 與 } \overline{CD} = \sqrt{10}$$

△ CDE 的邊長比為

$$\begin{aligned} \overline{CE} : \overline{DE} : \overline{CD} &= \sqrt{5} : \sqrt{5} : \sqrt{10} \\ &= 1 : 1 : \sqrt{2} \end{aligned}$$

∴ △ CDE 為等腰直角三角形，又 △ BDF ≅△ CEA（SSS）

∴ ∠B = ∠ACE

∴ ∠B + ∠C = ∠ECD = 45°

故得證 ∠A + ∠B + ∠C = 90°

(三) 用餘弦函數(cos)來解

∠A = 45°，∠B + ∠C =?

$\cos(B + C)$

$= \cos B \cos C - \sin B \sin C$

$= \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}$

$= \frac{5}{\sqrt{50}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$

∴ ∠B + ∠C = 45° ⇒ ∠A + ∠B + ∠C = 90°

(四) 用正弦函數(sin)來解題

∠A = 45°，∠B + ∠C =?

$\sin(B + C)$

$= \sin B \cos C + \cos B \sin C$

$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}$

$= \frac{5}{\sqrt{50}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore \angle B + \angle C = 45° \Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C = 90°$

(五) 用正切函數 tan 來解題

$\angle A = 45°$，$\angle B + \angle C = ?$

$\tan(B + C)$

$$= \frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}}$$

$= 1$

$\therefore \angle B + \angle C = 45° \Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C = 90°$

二、探討這一題使用相似形解法是否可以推廣到其他角度

根據前文五種面向的探討，針對相似形的解題方式，將會得到我們都是先透過邊長比的關係再進行角度的計算，那麼如果相似形真的成立的狀況下，我們將探究其邊與邊的關係。

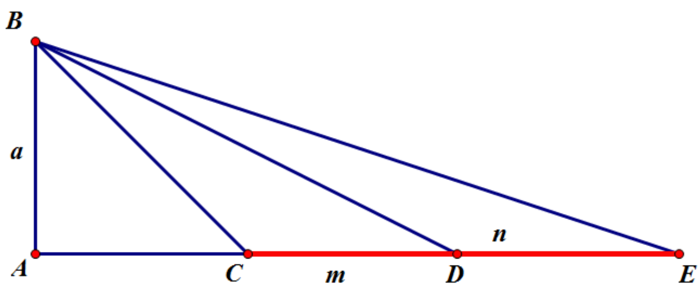


圖 四

(一) 觀察：

1、 給定 $a = 1$、$\angle A = 90°$、$\triangle BDF$ 為等腰直角三角形、令 $\overline{CD} = m$ 與

$\overline{CE} = \mathrm{n}$且 $\mathrm{m} < \overline{CB}$。如果 $\Delta\mathrm{BCD} \sim \Delta\mathrm{BEC}$ 那麼

$$\mathrm{m} \times \mathrm{n} = 2 = 2 \times 1^2$$

2、 給定 $\mathrm{a} = 2$、$\angle\mathrm{A} = 90°$、$\triangle\,\mathrm{BDF}$ 為等腰直角三角形、令 $\overline{CD} = \mathrm{m}$ 與 $\overline{CE} = \mathrm{n}$ 且 $\mathrm{m} < \overline{CB}$。如果 $\Delta\mathrm{BCD} \sim \Delta\mathrm{BEC}$ 那麼

$$\mathrm{m} \times \mathrm{n} = 8 = 2 \times 2^2$$

3、 給定 $\mathrm{a} = 3$、$\angle\mathrm{A} = 90°$、$\triangle\,\mathrm{BDF}$ 為等腰直角三角形、令 $\overline{CD} = \mathrm{m}$ 與 $\overline{CE} = \mathrm{n}$ 且 $\mathrm{m} < \overline{CB}$。如果 $\Delta\mathrm{BCD} \sim \Delta\mathrm{BEC}$ 那麼

$$\mathrm{m} \times \mathrm{n} = 18 = 2 \times 3^2$$

透過以上觀察，我猜測下列事實

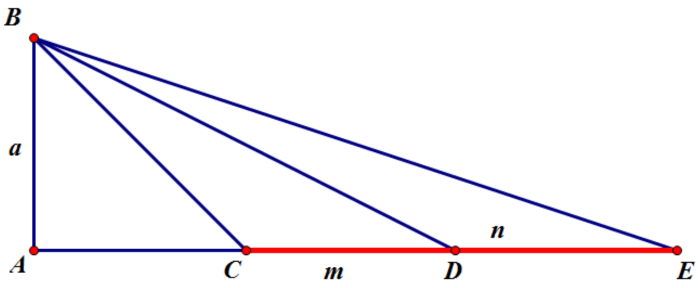


圖 五

(二) 猜測一（圖 五）

給定任意 $\mathrm{a} > 0$、$\angle\mathrm{A} = 90°$、$\triangle\,\mathrm{ABC}$ 為等腰直角三角形、令 $\overline{CD} = \mathrm{m}$ 與 $\overline{CE} = \mathrm{n}$ 且 $\mathrm{m} < \overline{CB}$。如果 $\Delta\mathrm{BCD} \sim \Delta\mathrm{ECB}$ 那麼 $\mathrm{m} \times \mathrm{n} = 2 \times a^2$。

(三) 證明：

令 $\Delta\mathrm{BCD} \sim \Delta\mathrm{ECB}$ 且 $\angle\mathrm{A} = 90°$

則$\overline{BC}:\overline{CD} = \overline{EC}:\overline{CB}$

我們知道$\overline{BC} = \overline{CB} = \sqrt{2}a$

所以

$$\sqrt{2}\mathrm{a} : \overline{CD} = \overline{EC} : \sqrt{2}a$$
$$\Rightarrow \quad \overline{CD} \times \overline{EC} = 2 \times a^2$$
$$\Rightarrow \quad \mathrm{m} \times \mathrm{n} = 2 \times a^2$$

上述的證明讓我們想更進一步的想知道，如果我們僅有邊與邊的關係是否能反推兩者是相似形，下列我們將給出猜測與證明

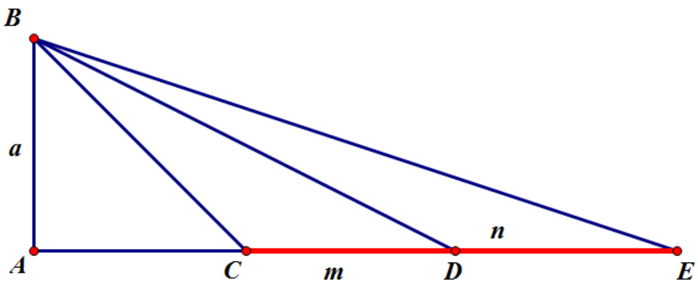


圖 六

(四) 猜測二（圖 六）

給定任意 $a > 0$、$\angle A = 90°$、$\triangle ABC$ 為等腰直角三角形、令 $\overline{CD} = \mathrm{m}$ 與 $\overline{CE} = \mathrm{n}$ 。

如果 $\mathrm{m} \times \mathrm{n} = 2 \times a^2$ 那麼

$$\Delta BCD \sim \Delta ECB$$

(五) 證明

令 $\mathrm{m} \times \mathrm{n} = 2 \times a^2$ 則 $\mathrm{n} = (2 \times a^2)/m$

且因 $\triangle ABC$ 為等腰直角三角形，所以 $\overline{BC} = \sqrt{2}a$

分別對於 ΔBCD 與 ΔECB 的邊長比如下

$$(1)\triangle BCD: \quad \overline{BC} : \overline{CD} = \sqrt{2}a : \mathrm{m}$$
$$(2)\triangle ECB: \quad \overline{EC} : \overline{CB} = \mathrm{n} : \sqrt{2}a$$
$$= (2 \times a^2)/m : \sqrt{2}a$$
$$= \sqrt{2}a : \mathrm{m}$$
$$= \overline{BC} : \overline{CD}$$

又 $\angle BCD$ 為共用角，故得證

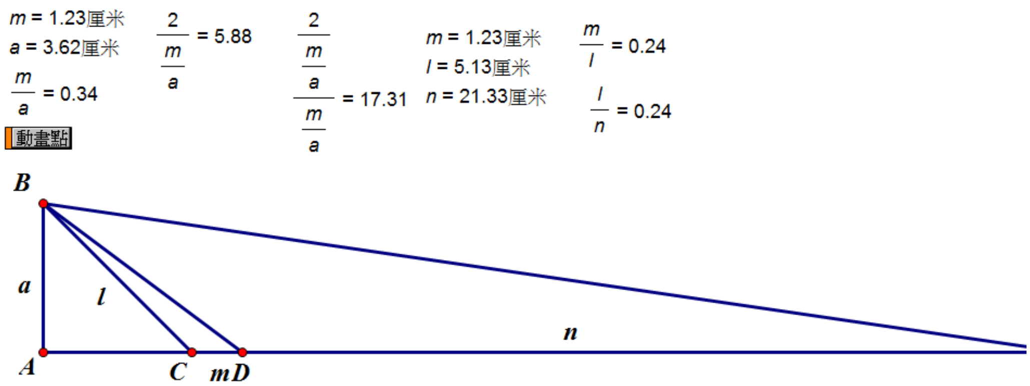
$$\Delta BCD \sim \Delta ECB\ (SAS)$$

結合猜想一與猜想二我將進行以下實作，在相似形的條件較不容易在電腦軟體上實現，因而轉向作固定邊與邊關係在確認是否為相似形。

(六) 實作

我用 GSP 畫了一些圖，設定$mn = 2$，也得到了$\Delta BCD \sim \Delta BEC$的方式：

如圖 ，這兩種情況都符合$m : l = l : n$。



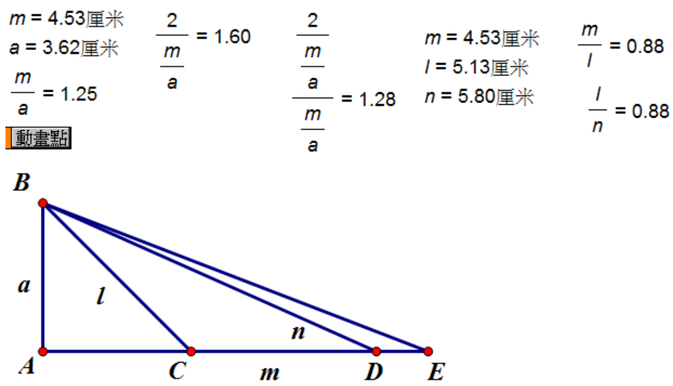


圖 七

(七)用相似的概念來看不是 45^0時的情況

1.觀察：

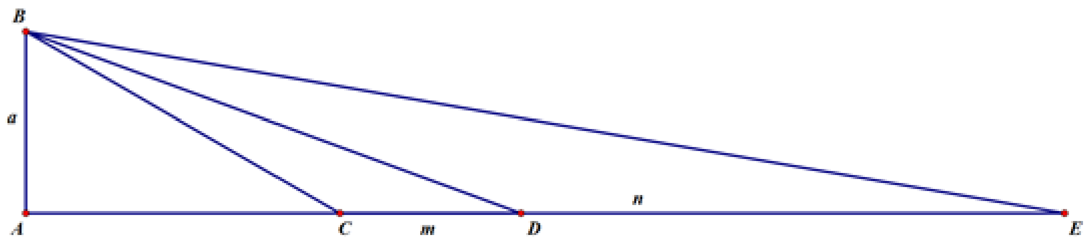


圖 八

給定 $a=1$、$\angle B=60°$、Δ ABC 為直角三角形、令 $\overline{CD}=\mathrm{m}$ 與 $\overline{CE}=\mathrm{n}$且 $\mathrm{m}<\overline{CB}$，如。如果 $\Delta\mathrm{BCD}\sim\Delta\mathrm{BEC}$ 那麼

$$\mathrm{m}\times\mathrm{n}=4$$

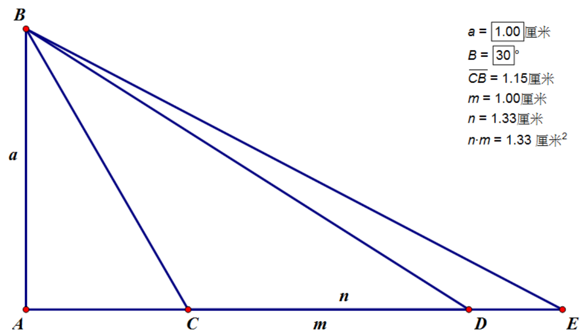


圖 九

(1)給定 $a=1$、$\angle B=30°$、Δ BDF 為直角三角形、令 $\overline{CD}=\mathrm{m}$ 與 $\overline{CE}=\mathrm{n}$且 $\mathrm{m}<\overline{CB}$，如圖 。如果 $\Delta\mathrm{BCD}\sim\Delta\mathrm{BEC}$ 那麼

$$\mathrm{m}\times\mathrm{n}=\frac{4}{3}$$

透過以上觀察，我猜測下列事實

2.猜測一：

給定 $a=1$、$\angle B$ 為任意角且 Δ ABC 為直角三角形、令 $\overline{CD}=\mathrm{m}$ 與$\overline{CE}=\mathrm{n}$、$\overline{CB}=\mathrm{k}$ 且 $\mathrm{m}<\overline{CB}$。如果 $\Delta\mathrm{BCD}\sim\Delta\mathrm{BEC}$ 那麼

$$\mathrm{m}\times\mathrm{n}=k^2$$

3. 證明：

令 $\Delta\mathrm{BCD} \sim \Delta\mathrm{ECB}$ 且 $\angle\mathrm{B} = \theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，對於 $\triangle\mathrm{ABC}$透過正弦定理可得到

$$k = \overline{CB} = \frac{1}{\sin(90° - \theta)} = \frac{1}{\cos(\theta)}$$

與

$$\overline{BC}:\overline{CD} = \overline{EC}:\overline{CB}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{CD} \times \overline{EC} = \overline{BC} \times \overline{CB}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{CD} \times \overline{EC} = k^2$$

$$\Rightarrow \quad \overline{CD} \times \overline{EC} = 1/\cos^2(\theta)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{m} \times n = 1/\cos^2(\theta)$$

經由證明我們除了得到

$$\mathrm{m} \times \mathrm{n} = k^2$$

在老師的提醒過程中，引入了正弦定理，我們的猜想與給定的關係更為顯著，猜想更可以改為如下：

給定 $\mathrm{a} = 1$、$\angle\mathrm{B}$ 為任意角且 $\triangle\mathrm{ABC}$ 為直角三角形、令 $\overline{CD} = \mathrm{m}$ 與$\overline{CE} = \mathrm{n}$ 且 $\mathrm{m} < \overline{CB}$。如果 $\Delta\mathrm{BCD} \sim \Delta\mathrm{BEC}$ 那麼

$$\mathrm{m} \times \mathrm{n} = 1/\cos^2(\theta)$$

相同的想法我們也希望能就由已知邊與邊關係與得知 $\triangle\mathrm{ABC}$ 中非直角的其中一角角度，是否也能找回相似形，因而做了以下猜想

4.猜測二：

給定 $\mathrm{a} = 1$、$\angle\mathrm{B}$ 為任意角且 $\triangle\mathrm{ABC}$ 為直角三角形、令 $\overline{CD} = \mathrm{m}$ 與$\overline{CE} = \mathrm{n}$ 且 $\mathrm{m} < \overline{CB}$。如果 $\mathrm{m} \times \mathrm{n} = 1/\cos^2(\theta)$ 那麼

$$\Delta\mathrm{BCD} \sim \Delta\mathrm{BEC}$$

5.證明：

令$a=1$且$m\times n=1/\cos^2(\theta), 0<\theta<\frac{\pi}{2}$

且因Δ ABC為直角三角形，又因$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=1/\cos\theta$，所以$\overline{BC}=1/\cos\theta$

分別對於Δ BCD與Δ ECB的邊長比如下:

(1) Δ BCD: $\overline{BC}:\overline{CD}=1/\cos\theta:m$

(2) Δ ECB: $\overline{EC}:\overline{CB}=n:1/\cos\theta$

$$=\mathrm{mn}:\mathrm{m}/\cos\theta$$

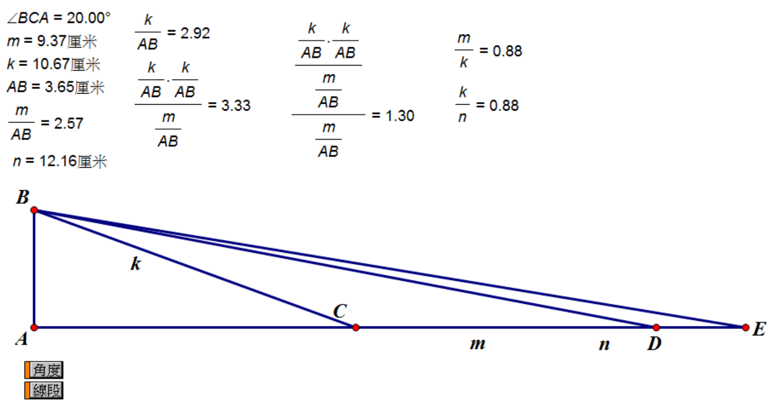
$$=1/cos^2\theta:m/\cos\theta$$

$$=1/\cos:\mathrm{m}$$

6.實作：

我用 GSP 畫了一些圖，設計一個角度可改變的程式，

設定$\mathrm{mn}=k^2$(圖 十)，最後還是有ΔBCD~ΔECB的結果



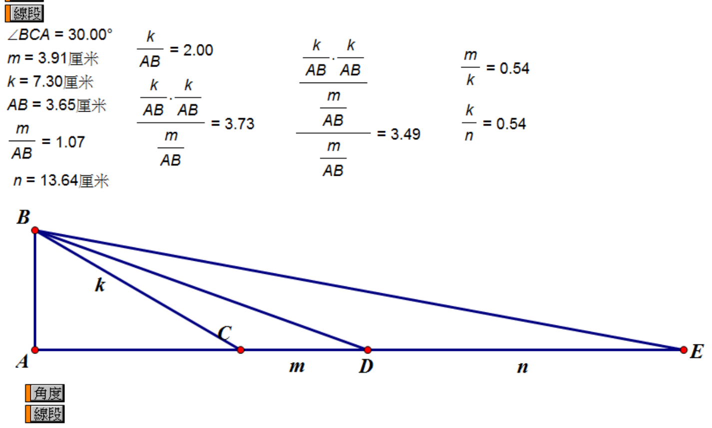


圖 十

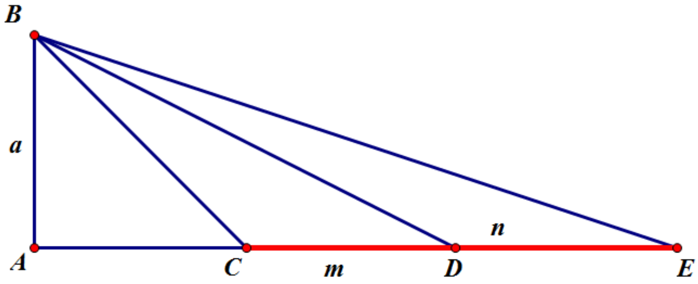


圖 十一

在延伸這次的題目之前我們回顧前面兩個證明總結以下內容

引理一：給定任意 $a > 0$、$\angle A = 90°$、$\triangle ABC$ 為等腰直角三角形、令 $\overline{CD} = m$ 與 $\overline{CE} = n$ 。$m \times n = 2 \times a^2$若且為若$\Delta BCD \sim \Delta ECB$。

引理二：給定 $a = 1$、$\angle B$ 為任意角、$\triangle ABC$ 為直角三角形、令 $\overline{CD} = m$ 與 $\overline{CE} = n$ 。$m \times n = sec^2\theta$若且為若$\Delta BCD \sim \Delta BEC$。

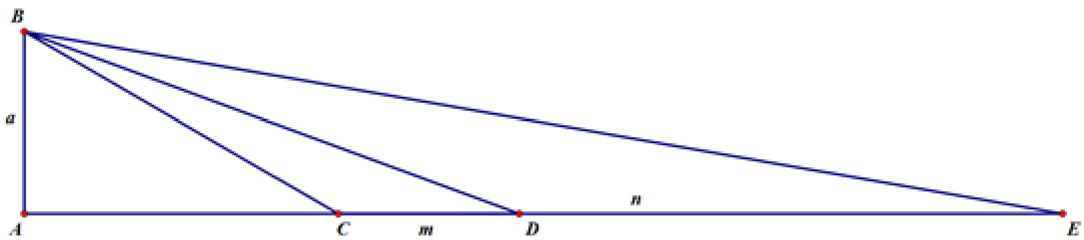


圖 十二

在引理二我們更深入了發現了下列事實

若$\Delta BCD \sim \Delta ECB$時$\angle BEA + \angle BDA = \angle BCA$

三、探討這題目拆成三個角以上的情形為何？

我們首先要做的是將$\angle C$拆成$\angle D + \angle F + \angle G$

(一)45°拆成三個角

我們將圖形繪製如下(圖 十三)：

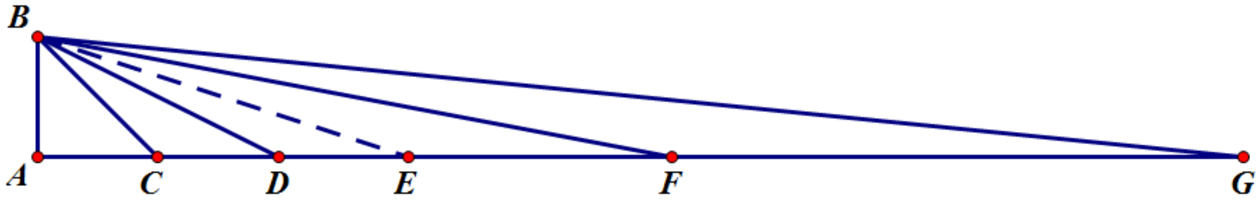


圖 十三

如圖，假設$\overline{AB}=\overline{AC}=1$，$\angle A=90°$，$\overline{CD}=m$，$\overline{CF}=n$，$\overline{CG}=p$，

$\overline{DE}=b$(若 E 點在 D 點左邊則 b 取負數)，結果相同，

透過題幹有$\angle C=\angle D+\angle F+\angle G$，

根據引理二，我們將會找到一個三角形 ABE 使得$\angle BGA+\angle BFA=\angle BEA$，可以知道的結果如下，在透過引理一得

$$\overline{BE}^2=\overline{EF}\cdot\overline{EG}=(n-m-b)(p-m-b)$$

且由畢氏定理得知$\overline{AB}^2+\overline{AE}^2=\overline{BE}^2$

$$\Rightarrow 1+(1+m+b)^2=(n-m-b)(p-m-b)$$

又$m(m+b)=2$，$\therefore m+b=\frac{2}{m}$

$$\Longrightarrow \left(n-\frac{2}{m}\right)\left(p-\frac{2}{m}\right)=1+\left(1+\frac{2}{m}\right)^2$$

$$\Longrightarrow np-\frac{2}{m}(n+p)+\left(\frac{2}{m}\right)^2=1+1+\frac{4}{m}+\left(\frac{2}{m}\right)^2$$

$$\Longrightarrow mnp-2(n+p)=2m+4$$

$$\Longrightarrow mnp=2(m+n+p)+4$$

結論一、當$\overline{AB}=\overline{AC}=1$，$\angle A=90°$，$\overline{CD}=m$，$\overline{CF}=n$，$\overline{CG}=p$，

若$\angle D+\angle F+\angle G=45°$則$mnp=2(m+n+p)+4$

因為原題目是以正方形當單位，所以我們希望可以找到剛好落在格子點上的組合，也就是整數解，所以我們有下列結論二。

結論二、m、n、p 都為正整數時，此時 m＜n＜p，

$\therefore m = b = 1$

$\Rightarrow 1 + (m+2)^2 = (n-m-1)(p-m-1)$

$\Rightarrow (n-2)(p-2) = 10$

可得$\begin{cases} n-2=1 \\ p-2=10 \end{cases}$ or $\begin{cases} n-2=2 \\ p-2=5 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=3 \\ p=12 \end{cases}$ or $\begin{cases} m=1 \\ n=4 \\ p=7 \end{cases}$，有兩組整數解。其圖形如下(圖 十四)

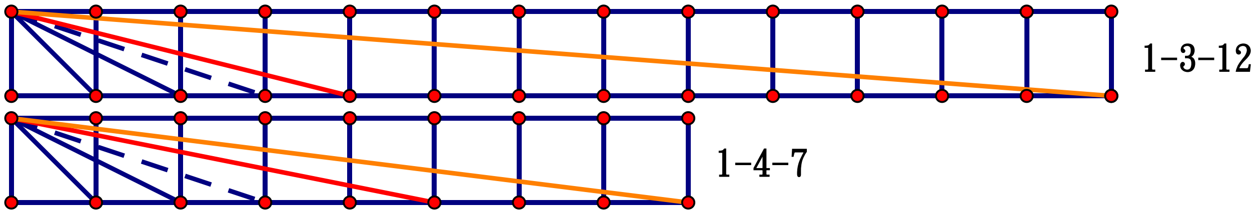


圖 十四

(二)45°拆成四個角

我們將圖形繪製如下(圖 十五)：

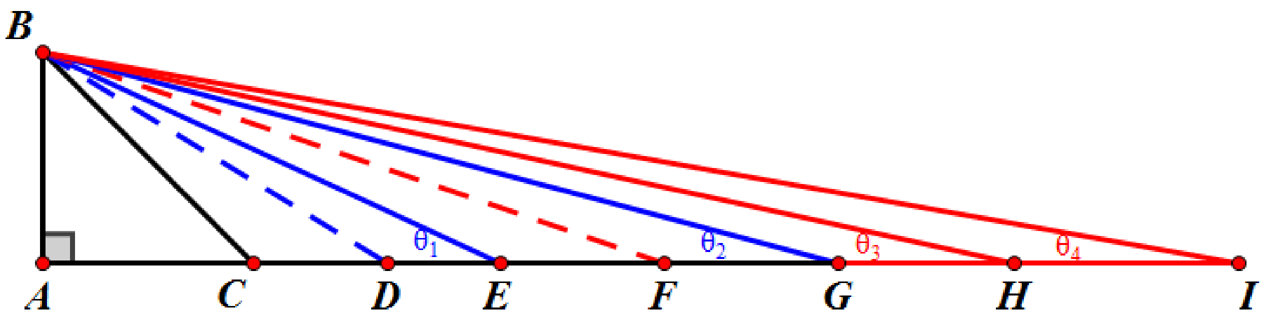


圖 十五

如上圖，假設$\overline{AB} = \overline{AC} = 1$，$\angle A = 90°$，$\overline{CE} = m$，$\overline{CG} = n$，$\overline{CH} = p$，$\overline{CI} = q$，$\overline{CD} = t$，$\overline{CF} = b$

$$\begin{cases} t \cdot b = 2 \\ (m-t)\cdot(n-t) = 1 + (1+t)^2 \\ (p-b)\cdot(q-b) = 1 + (1+b)^2 \end{cases}$$

$\Longrightarrow mn - t(m+n) + t^2 = 2 + 2t + t^2$

$\Longrightarrow pq - b(p+q) + b^2 = 2 + 2b + b^2$

$\Rightarrow \mathrm{mn} - 2 = \mathrm{t}(\mathrm{m} + \mathrm{n} + 2)$

$\Rightarrow \mathrm{pq} - 2 = \mathrm{b}(\mathrm{p} + \mathrm{q} + 2)$

$\Rightarrow \frac{mn-2}{2+m+n} = a$，$\frac{pq-2}{p+q+2} = b$

$$\Rightarrow \frac{(mn-2)(pq-2)}{(m+n+2)(p+q+2)} = 2$$

$\Rightarrow \mathrm{mnpq} - 2(\mathrm{mn} + \mathrm{pq}) + 4 = 2(\mathrm{m} + \mathrm{n} + 2)(\mathrm{p} + \mathrm{q} + 2)$

$= 2(\mathrm{mp} + \mathrm{mq} + 2\mathrm{m} + \mathrm{np} + \mathrm{nq} + 2\mathrm{n} + 2\mathrm{p} + 2\mathrm{q} + 4)$

$\Rightarrow \mathrm{mnpq} = 2(\mathrm{mn} + \mathrm{mp} + \mathrm{mq} + \mathrm{np} + \mathrm{nq} + \mathrm{pq}) + 4(\mathrm{m} + \mathrm{n} + \mathrm{p} + \mathrm{q}) + 4$

$\Rightarrow (m+n+p+q+2)^2 - (m^2+n^2+p^2+q^2) = \mathrm{mnpq}$

可得十組整數解:

m	n	p	q
1	3	13	182
1	3	14	97
1	3	17	46
1	3	22	29
1	4	8	72
1	4	12	20
1	5	7	30
1	6	7	17
2	3	6	12
2	4	6	7

結論、$\overline{AB} = \overline{AC} = 1$，$\angle \mathrm{A} = 90°$，$\overline{CE} = m$，$\overline{CG} = n$，$\overline{CH} = p$，$\overline{CI} = q$，$\overline{CD} = t$，$\overline{CF} = b$

若$\angle \mathrm{E} + \angle \mathrm{G} + \angle \mathrm{H} + \angle \mathrm{I} = 45°$

則$(m+n+p+q+2)^2 - (m^2+n^2+p^2+q^2) = \mathrm{mnpq}$

(三)45°拆成 n 個角之推法

1.**定義：**

(1) $m_{[\theta\to n]}$：代表分成 n 個角和等於θ的情形

舉例：

$m_{[45°\to 1]}$ (圖 十六) $\Longrightarrow$

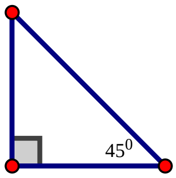


圖 十六

$m_{[45°\to 2]}$ (圖 十七) $\Longrightarrow$

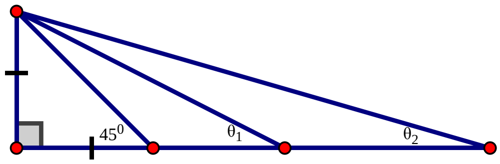


圖 十七

$\theta_1+\theta_2=45°$

$m_{[45°\to n]}$ (圖 十八) $\Longrightarrow$

$\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_n=45°$

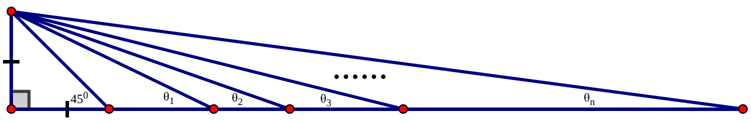


圖 十八

(2) $f_1(a,b)=ab$

(3) $f_2(m_a,m_b)=\frac{m_a m_b-2}{m_a+m_b+2}$

(4)m_i:代表從 C 點到θ_i頂點的長度(圖 十九)

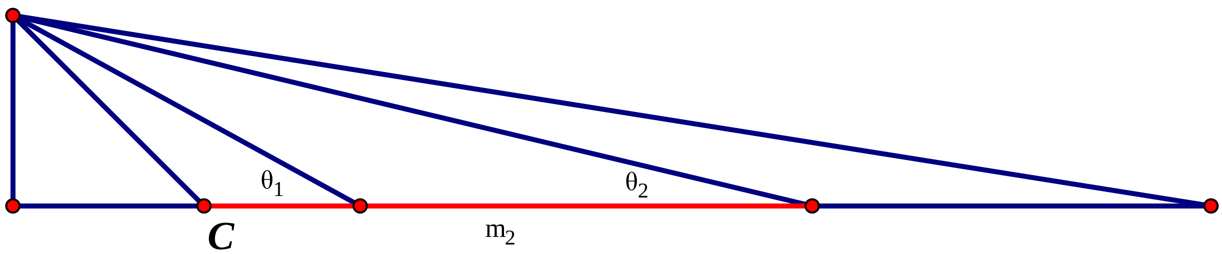


圖 十九

(5) $F[m_{[45°\to n]}]$：$m_{[45°\to n]}$下$m_1,m_2,m_3\ldots\ldots m_n$的迭代式

2.

(1)由45°拆成兩個角導出拆成三個角

$$\begin{cases} mn=2 \\ n=\dfrac{np-2}{n+p+2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{m(np-2)}{n+p+2} = 2$$

$$\Rightarrow \mathrm{mnp} - 2\mathrm{m} = 2\mathrm{n} + 2\mathrm{p} + 4$$

$$\Rightarrow \mathrm{mnp} = 2(\mathrm{m} + \mathrm{n} + \mathrm{p}) + 4$$

(2)由45°拆成三個角導出拆成四個角

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{mnp} = 2(\mathrm{m} + \mathrm{n} + \mathrm{p}) + 4 \\ \qquad p = \dfrac{pq-2}{p+q+2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{mn}\left(\frac{pq-2}{p+q+2}\right) = 2\left(m+n+\frac{pq-2}{p+q+2}\right) + 4$$

$$\Rightarrow \frac{mnpq-2mn}{p+q+2} = 2(m+n) + \frac{2pq-4}{p+q+2} + 4$$

$$\Rightarrow \mathrm{mnpq} - 2\mathrm{mn} = 2(\mathrm{mp} + \mathrm{mq} + \mathrm{np} + \mathrm{nq}) + 2\mathrm{pq} - 4 + 4(\mathrm{m} + \mathrm{n} + \mathrm{p} + \mathrm{q}) + 8$$

$$\Rightarrow \mathrm{mnpq} = 2(\mathrm{mn} + \mathrm{mp} + \mathrm{mq} + \mathrm{np} + \mathrm{nq} + \mathrm{pq}) + 4(\mathrm{m} + \mathrm{n} + \mathrm{p} + \mathrm{q}) + 4$$

$$\Rightarrow \mathrm{mnpq} = (\mathrm{m} + \mathrm{n} + \mathrm{p} + \mathrm{q} + 2)^2 - (\mathrm{m}^2 + \mathrm{n}^2 + \mathrm{p}^2 + \mathrm{q}^2) = \mathrm{mnpq}$$

(3)推論

$$f_1(m_1, m_2) = m_1 \cdot m_2 = 2$$

$$F[m_{[3]}] = f_1(m_1, f_2(m_2, m_3)) = m_1 \cdot \frac{m_2 m_3 - 2}{m_2 + m_3 + 2} = \frac{m_1 m_2 m_3 - 2m_1}{m_2 + m_3 + 2} = 2$$

$$F[m_{[4]}] = f_1(m_1, f_2(m_2, f_2(m_3, m_4))) = m_1 \cdot \frac{m_2 \frac{m_3 m_4 - 2}{m_3 + m_4 + 2} - 2}{m_2 + \frac{m_3 m_4 - 2}{m_3 + m_4 + 2} + 2} = 2$$

……

$$F[m_{[n]}] = f_1(m_1, f_2(m_2, f_2(m_3, f_2(m_4, \dots f_2(m_{n-1}, m_n) \dots)))) = 2$$

(四) ∠C 拆成 3 個角的情形(圖 二十)

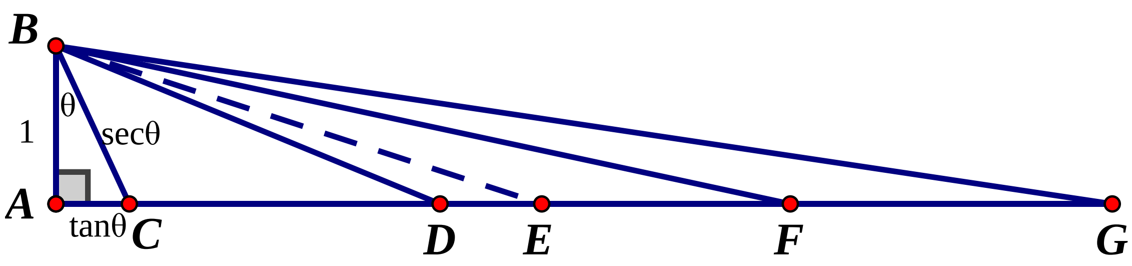


圖 二十

如上圖，假設$\overline{AB}=1$，$\overline{AC}=tan\theta$，$\angle A=90°$，$\overline{CD}=m$，$\overline{CF}=n$，$\overline{CG}=p$，$\overline{DE}=b$

$\because \mathrm{m}(\mathrm{m}+\mathrm{b})=(sec\theta)^2$

$$\Rightarrow \left(\mathrm{n}-\frac{sec^2\theta}{m}\right)\left(\mathrm{p}-\frac{sec^2\theta}{m}\right)=1+\left(\tan\theta+\frac{sec^2\theta}{m}\right)^2$$

$$\Rightarrow \mathrm{np}-\frac{sec^2\theta}{m}(n+p)+\left(\frac{sec^2\theta}{m}\right)^2=1+tan^2\theta+\frac{2tan\theta sec^2\theta}{m}+\left(\frac{sec^2\theta}{m}\right)^2$$

$$\Rightarrow \mathrm{mnp}-\sec^2\theta(n+p)=m(1+tan^2\theta)+2tan\theta sec^2\theta$$

$$\Rightarrow \mathrm{mnp}=\sec^2\theta(n+p+m)+2tan\theta sec^2\theta$$

結論、當$\overline{AB}=1$，$\overline{AC}=tan\theta$，$\angle A=90°$，$\overline{CD}=m$，$\overline{CF}=n$，$\overline{CG}=p$

若$\angle D+\angle F+\angle G=90°-\theta$，

則$\mathrm{mnp}=\sec^2\theta(n+p+m)+2tan\theta sec^2\theta$

(五) ∠C 拆成 4 個角的情形(圖 二十一)

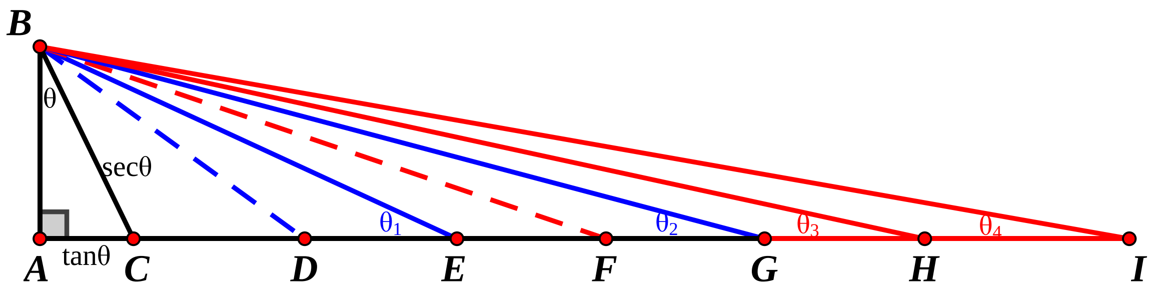


圖 二十一

如上圖，

$\overline{AB}=1$，$\overline{AC}=tan\theta$，$\angle \mathrm{A}=90°$，$\overline{CI}=q$，$\overline{CD}=t$，$\overline{CF}=b$，$\overline{CH}=p$，$\overline{CE}=m$，$\overline{CG}=n$

$$\begin{cases} sec^2\theta = tb \\ (tan\theta+t)^2+1=(m-t)(n-t) \\ (tan\theta+b)^2+1=(p-b)(q-b) \end{cases}$$

$\Rightarrow tan^2\theta+2t\cdot tan\theta+t^2+1=mn-t(m+n)+t^2$

$\Rightarrow tan^2\theta+2b\cdot tan\theta+b^2+1=pq-b(p+q)+b^2$

$\Rightarrow \mathrm{mn}-sec^2\theta=t(2tan\theta+m+n)$

$\Rightarrow \mathrm{pq}-sec^2\theta=b(2tan\theta+p+q)$

$\Rightarrow \dfrac{mn-sec^2\theta}{2tan\theta+m+n}=t$，$\dfrac{pq-sec^2\theta}{2tan\theta+p+q}=b$

$\Rightarrow \dfrac{(mn-sec^2\theta)(pq-sec^2\theta)}{(2tan\theta+m+n)(2tan\theta+p+q)}=sec^2\theta$

$\Rightarrow (mn-sec^2\theta)(pq-sec^2\theta)=sec^2\theta(2tan\theta+m+n)(2tan\theta+p+q)$

$=sec^2\theta[mp+mq+np+nq+2tan\theta(m+n+p+q)+$

$4tan^2\theta]$

$\Rightarrow \mathrm{mnpq}-sec\theta^2(mn+pq)+sec^4\theta\ =sec^2\theta[\,mp+mq+np+nq+$

$2tan\theta(m+n+p+q)+4tan^2\theta$

$\Rightarrow \mathrm{mnpq}=sec^2\theta[mn+mp+mq+np+nq+pq+2tan^2\theta(m+n+p+q)$

$-sec^2\theta+4tan^2\theta]$

$\Rightarrow \mathrm{mnpq}=sec^2\theta(mn+mp+mq+np+nq+pq)+2sec^2\theta tan\theta(m+n+p+q)$

$-sec^4\theta+sec^4\theta+4tan^2\theta sec^2\theta$

結論、$\overline{AB}=1$，$\overline{AC}=tan\theta$，$\angle \mathrm{A}=90°$，$\overline{CI}=q$，$\overline{CD}=t$，$\overline{CF}=b$，$\overline{CH}=p$，$\overline{CE}=m$，$\overline{CG}=n$

若$\angle \mathrm{E}+\angle \mathrm{G}+\angle \mathrm{H}+\angle \mathrm{I}=90°-\theta$，

則$\mathrm{mnpq}=sec^2\theta(mn+mp+mq+np+nq+pq)+2sec^2\theta tan\theta(m+n+p+q)$

$-sec^4\theta+sec^4\theta+4tan^2\theta sec^2\theta$

(六) ∠C 拆成 n 個角的情形

1.發現:

(1)拆成兩個角

$\mathrm{m} \times \mathrm{n} = sec^2\theta$

(2)拆成三個角

$\mathrm{mnp} = \sec^2\theta(n+p+m) + 2tan\theta sec^2\theta$

(3)拆成四個角

$$\mathrm{mnpq} = sec^2\theta(mn+mp+mq+np+nq+pq) + 2sec^2\theta tan\theta(m+n+p+q)$$
$$-sec^4\theta + sec^4\theta + 4tan^2\theta sec^2\theta$$

2.推論

$f_1(m_1, m_2) = m_1 \cdot m_2 = 2$

$$F[m_{[\theta\to3]}] = f_1(m_1, f_2(m_2, m_3)) = m_1 \cdot \frac{m_2m_3 - sec^2\theta}{m_2 + m_3 + 2tan\theta} = \frac{m_1m_2m_3 - sec^2\theta m_1}{m_2 + m_3 + 2tan\theta} = sec^2\theta$$

$$F[m_{[\theta\to4]}] = f_1(m_1, f_2(m_2, f_2(m_3, m_4))) = m_1 \cdot \frac{m_2\frac{m_3m_4-2}{m_3+m_4+2} - sec^2\theta}{m_2 + \frac{m_3m_4-sec^2\theta}{m_3+m_4+2tan\theta} + 2tan\theta} = sec^2\theta$$

……

$$F[m_{[\theta\to n]}] = f_1(m_1, f_2(m_2, f_2(m_3, f_2(m_4, \dots f_2(m_{n-1}, m_n)\dots)))) = sec^2\theta$$

(七)觀察特別角90°拆成 n 個角之變化

(1)發現:

拆成兩個角

$\mathrm{mn} = 1$

拆成三個角

$$\mathrm{mnp} = \mathrm{n} + \mathrm{p} + 1$$

拆成四個角

$$\mathrm{mnpq} = \mathrm{np} + \mathrm{nq} + \mathrm{pq} + \mathrm{n} + \mathrm{p} + \mathrm{q} + 1$$

2.(1)由90°拆成兩個角導出拆成三個角

$$\begin{cases} \mathrm{mn} = 1 \\ \mathrm{n} = \dfrac{\mathrm{np}}{\mathrm{n} + \mathrm{p} + 1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{mnp}}{\mathrm{n} + \mathrm{p} + 1} = 1$$

$$\Rightarrow \mathrm{mnp} = \mathrm{n} + \mathrm{p} + 1$$

(2)由90°拆成三個角導出拆成四個角

$$\begin{cases} \mathrm{mnp} = \mathrm{n} + \mathrm{p} + 1 \\ \mathrm{p} = \dfrac{\mathrm{pq}}{\mathrm{p} + \mathrm{q} + 1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{mn}\frac{\mathrm{pq}}{\mathrm{p} + \mathrm{q} + 1} = \mathrm{n} + \frac{\mathrm{pq}}{\mathrm{p} + \mathrm{q} + 1} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{mnpq}}{\mathrm{p} + \mathrm{q} + 1} = \mathrm{n} + \frac{\mathrm{pq}}{\mathrm{p} + \mathrm{q} + 1} + 1$$

$$\Rightarrow \mathrm{mnpq} = \mathrm{np} + \mathrm{nq} + \mathrm{pq} + \mathrm{n} + \mathrm{p} + \mathrm{q} + 1$$

(3)定義

$\mathrm{D}_\mathrm{p}^\mathrm{n}$：$\mathrm{m}_2 \sim \mathrm{m}_\mathrm{n}$任取p項相乘之後再相加的結果

例：D_2^4：$\mathrm{m}_2 \sim \mathrm{m}_4$任取 2 項$\Rightarrow \mathrm{m}_2\mathrm{m}_3 + \mathrm{m}_2\mathrm{m}_4 + \mathrm{m}_3\mathrm{m}_4$

D_3^5：$\mathrm{m}_2 \sim \mathrm{m}_5$任取 3 項$\Rightarrow \mathrm{m}_2\mathrm{m}_3\mathrm{m}_4 + \mathrm{m}_2\mathrm{m}_3\mathrm{m}_5 + \mathrm{m}_2\mathrm{m}_4\mathrm{m}_5 + \mathrm{m}_3\mathrm{m}_4\mathrm{m}_5$

$(1) \mathrm{m_1 m_2 m_3 \dots m_n}$

$$= \mathrm{D^n_{n-2} + D^n_{n-3} + D^n_{n-4} + D^n_{n-5} + \cdots + D^n_3 + D^n_2 + D^n_1 + 1}$$

$(2) \mathrm{m_1 m_2 m_3 \dots \frac{m_n m_{n+1}}{m_n + m_{n+1} + 1}}$

$$= \mathrm{D^{n-2}_{n-3}\left(m_{n-1} + \frac{m_n m_{n+1}}{m_n + m_{n+1} + 1} + 1\right) + D^{n-2}_{n-4}\left(m_{n-1} \cdot \frac{m_n m_{n+1}}{m_n + m_{n+1} + 1}\right) +}$$

$$\mathrm{D^{n-2}_{n-4}\left(m_{n-1} \cdot \frac{m_n m_{n+1}}{m_n + m_{n+1} + 1}\right) + \cdots + D^{n-2}_1\left(m_{n-1} \cdot \frac{m_n m_{n+1}}{m_n + m_{n+1} + 1}\right) +}$$

$$\mathrm{D^{n-2}_1\left(m_{n-1} + \frac{m_n m_{n+1}}{m_n + m_{n+1} + 1} + 1\right) + m_n \cdot \frac{m_n m_{n+1}}{m_n + m_{n+1} + 1} + m_{n-1}} + \frac{m_n m_{n+1}}{m_n + m_{n+1} + 1} + 1$$

$\therefore m_1 m_2 m_3 \dots m_n m_{n+1}$

$$= D^{n-2}_{n-3}[m_{n-1}(m_n + m_{n+1} + 1) + m_n m_{n+1} + m_n + m_{n+1} + 1] + D^{n-2}_{n-4}(m_{n-1} m_n m_{n+1}) +$$

$$D^{n-2}_{n-4}[m_{n-1}(m_n + m_{n+1} + 1) + m_n m_{n+1} + m_n + m_{n+1} + 1]$$

$$+ \cdots + D^{n-2}_1(m_{n-1} m_n m_{n+1}) + D^{n-2}_1[m_{n-1}(m_n + m_{n+1} + 1) + m_n m_{n+1} + m_n + m_{n+1} + 1]$$

$$+ m_{n-1} m_n m_{n+1} + m_{n-1}(m_n + m_{n+1} + 1) + m_n m_{n+1} + m_n + m_{n+1} + 1$$

$$= D^{n-2}_{n-3}(m_{n-1} m_n + m_{n-1} m_{n+1} + m_n m_{n+1} + m_{n-1} + m_n m_{n+1} + 1) +$$

$$D^{n-2}_{n-4}(m_{n-1} m_n m_{n+1}) +$$

$$D^{n-2}_{n-4}(m_{n-1} m_n + m_{n-1} m_{n+1} + m_n m_{n+1} + m_{n-1} + m_n m_{n+1} + 1) +$$

$$\dots + D^{n-2}_1(m_{n-1} m_n m_{n+1}) +$$

$$D^{n-2}_1(m_{n-1} m_n + m_{n-1} m_{n+1} + m_n m_{n+1} + m_{n-1} + m_n m_{n+1} + 1) +$$

$$m_{n+1} m_n m_{n+1} + m_{n-1} m_n + m_{n-1} m_{n+1} + m_n m_{n+1} + m_{n-1} + m_n + m_{n+1} + 1$$

$$= D^{n+1}_{n-1} + D^{n+1}_{n-2} + D^{n+1}_{n-3} + \cdots D^{n+1}_2 + D^{n+1}_1 + 1$$

伍、結論

一、給定任意 $\mathrm{a} > 0$、$\angle \mathrm{A} = 90°$、$\triangle \mathrm{ABC}$ 為等腰直角三角形、令 $\overline{CD} = \mathrm{m}$ 與 $\overline{CE} = \mathrm{n}$ 。$\mathrm{m} \times \mathrm{n} = 2 \times a^2$若且為若$\Delta\mathrm{BCD} \sim \Delta\mathrm{ECB}$。

二、給定 $\mathrm{a} = 1$、$\angle \mathrm{B}$ 為任意角、$\triangle \mathrm{ABC}$ 為直角三角形、令 $\overline{CD} = \mathrm{m}$ 與 $\overline{CE} = \mathrm{n}$ 。$\mathrm{m} \times \mathrm{n} =$

$sec^2\theta$若且為若$\Delta BCD \sim \Delta BEC$。

三、在猜想中我們都多了 $m < \overline{CB}$ 這個條件，是因為我們在實作過程中發現當 $m = \overline{CB}$時，ΔBCD 與 ΔECB 將會完全重合，$m > \overline{CB}$ 時 $m > n$ 將會與圖形不符，故加上此條件。但沒有這條件完全不影響我們的猜想，由$m \times n$ 會是一個定值也可得知。

四、當所有角加起來是45°時，我們可以推導出下列$m_i, i = 1 \sim n$的關係式

當$f_1(m_1, m_2) = m_1 \cdot m_2 = 2$成立時

$$F[m_{[n]}] = f_1(m_1, f_2(m_2, f_2(m_3, f_2(m_4, \ldots f_2(m_{n-1}, m_n) \ldots)))) = 2$$

五、根據結論四我們可以找到 45^0 分成 n 個角，整數格子點所在的位置

六、當所有角加起來是∠C時，我們可以推導出下列$m_i, i = 1 \sim n$的關係式

當$f_1(m_1, m_2) = m_1 \cdot m_2 = sec^2\theta$成立時

$$F[m_{[\theta \to n]}] = f_1(m_1, f_2(m_2, f_2(m_3, f_2(m_4, \ldots f_2(m_{n-1}, m_n) \ldots)))) = sec^2\theta$$

七、我們針對f_2的三維曲面圖形來看，曲面與 XY 平面的交集為雙曲線圖形$x \cdot y = \sec^2\theta$，更有趣的是這個雙曲線的頂點座標為 A($sec\theta$ ，$sec\theta$)，下圖為$\theta = 45°$的情形。

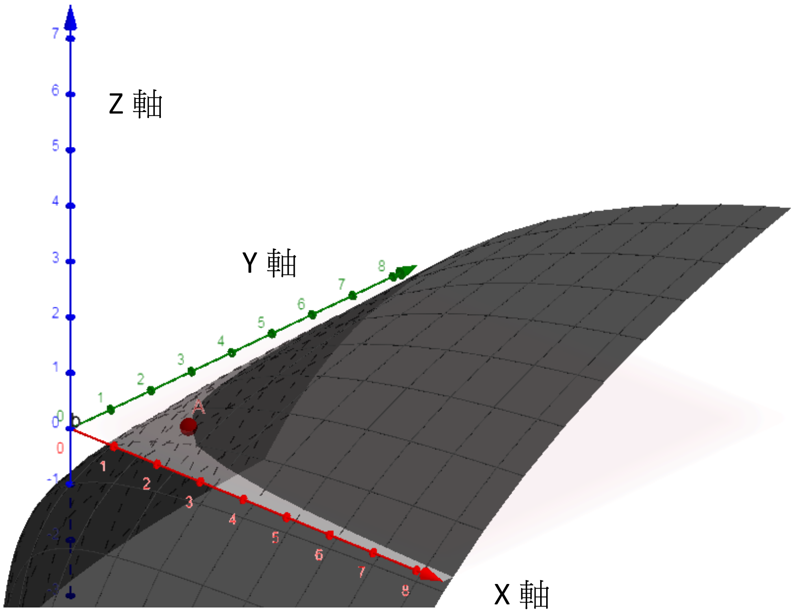


圖 二十二

陸、引注資料

一、亞瑟・班傑明(2017)。**數學大觀念**。貓頭鷹出版。

二、三角函數-維基百科。2017 年取自

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%87%BD%E6%95%B0

三、三角函數六邊形。2017 年取自

http://www.xxdao.com/320000/310061.shtml