壹、　研究動機

有一天，我們偶然在電視上看到「綜藝玩很大」這個節目，他們想要選一個人出來當關主，於是，吳宗憲想到了一個辦法，首先，大家先任意圍成一個圓圈，然後再抽籤，抽中的那個人便是 1 號，他的右邊第一位便是 2 號，右邊第二位是 3 號…，依此類推，接下來，從 1 開始往右邊數，每隔一人就淘汰 1 人，最後剩下來的那一個人就是關主。他們總共有 9 個人，最後的幸運兒是序號 3 號，他就可以順利成為關主，於是我們開始思考這樣的玩法是否會因人數的不同而有不同的結果，並嘗試著加入不同的條件，結果是否都會相同。

貳、　研究目的與研究問題

我們想要藉由實際的操作找出有 N 個人一起玩此遊戲時，最後可以成功成為關主的序號為何？並且嘗試加入不同的條件，改變遊戲規則，其幸運兒序號是否會跟著改變？

一、　找出 N 個人圍成圈時，每隔一人淘汰一人，幸運兒的序號為何？

二、　找出 N 個人圍成圈時，第一輪不淘汰 2 的倍數，幸運兒的序號為何？

三、　找出 N 個人圍成圈時，第一輪不淘汰 2n（n≧2）之倍數，幸運兒的序號為何？

四、　找出 N 個人圍成圈時，第一輪不淘汰 3 的倍數，幸運兒的序號為何？

五、　找出 N 個人圍成圈時，每隔兩人淘汰一人，幸運兒的序號為何？

六、　找出 N 個人圍成圈時，隨意加入一人(第一輪不淘汰)，此人要成為幸運兒，其位置應該放在何處？

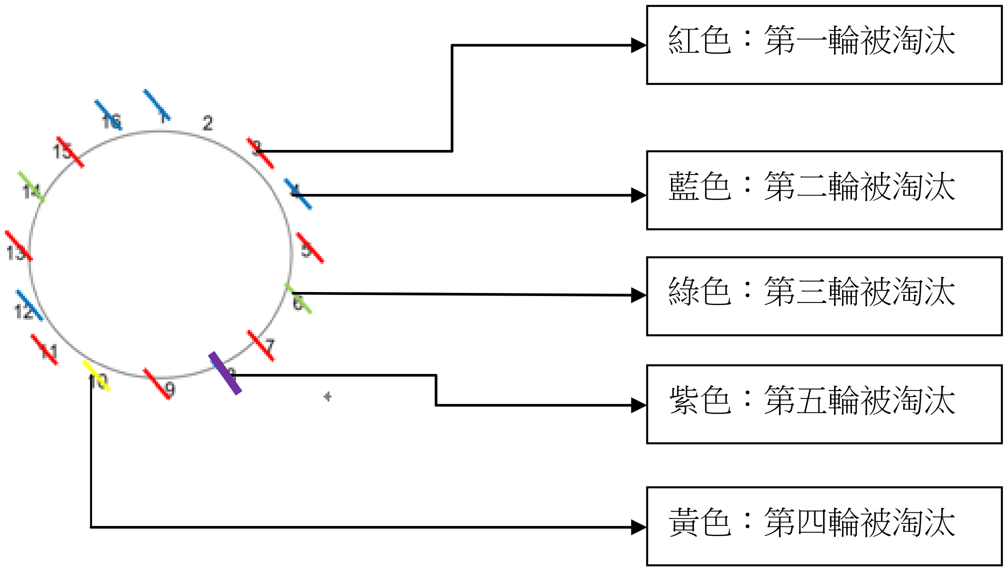
參、 解釋名詞

幸運兒：遊戲之後能夠順利留下來的序號

N：代表參與遊戲的總人數

 ：插入的幸運兒

A：A 為正整數的值，要使 2^A 最接近 N



肆、 預備知識

數列：將一串數字排成一列，不論有規律、沒有規律或數字一再重複出現都叫做數列。

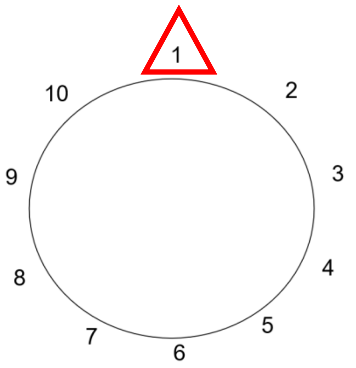
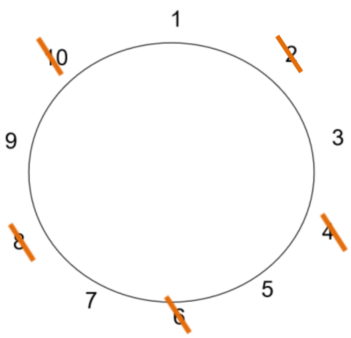
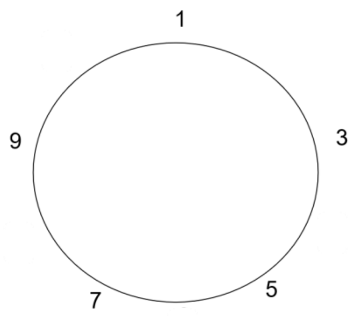
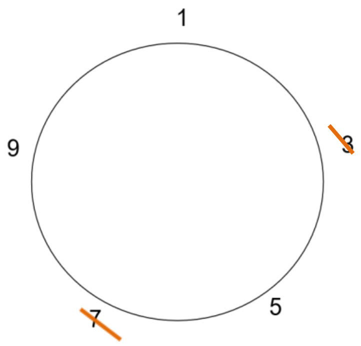
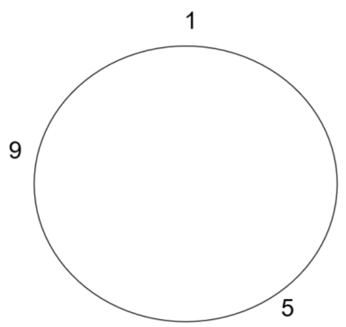
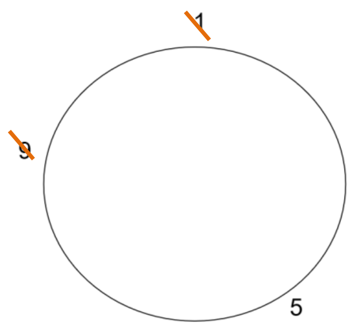
等差數列：在數列中的每一個數字稱為項，第一個數字稱為第 1 項或是首項，第二個數字稱為第 2 項，……，最後一個數字稱為末項。若後項減去前項都一樣的數列， 稱為等差數列。

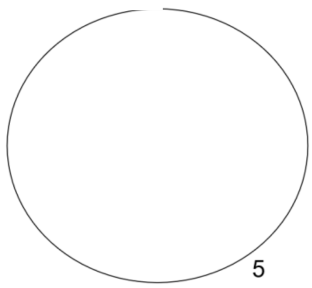
等比數列：一個數列，若從其第 2 項起，每一項和它前一項的比都等於同一個常數， 此數列稱為等比數列，而這常數稱為公比，通常用 r 表示， 若 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} \cdots\cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$， 則稱〈$a_n$〉是公比為 r 的等比數列。 一般以 a_1，$a_1 r$，$a_1 r^2$ ……$a_1 r^{n-1}$………表示等比數列〈a_n〉。

伍、　研究過程與方法

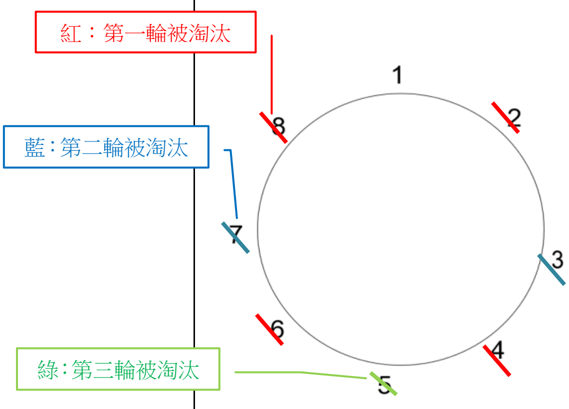
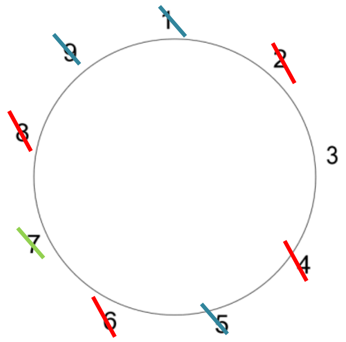
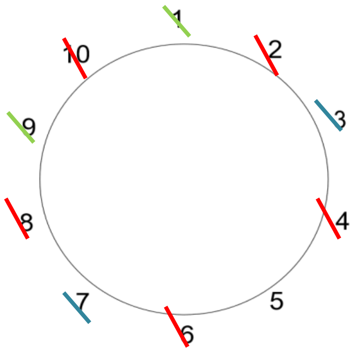
問題一: 找出 N 個人圍成圈時，每隔一人淘汰一人，幸運兒的序號為何？

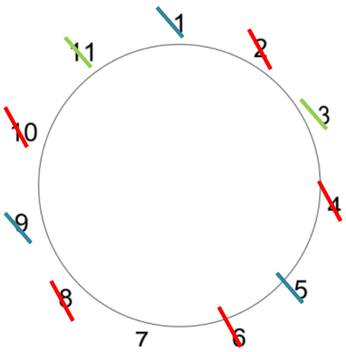
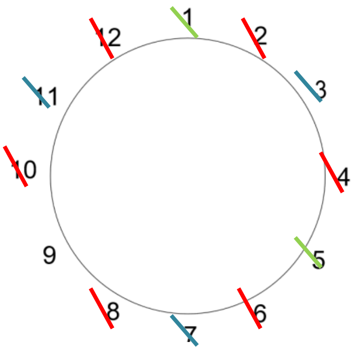
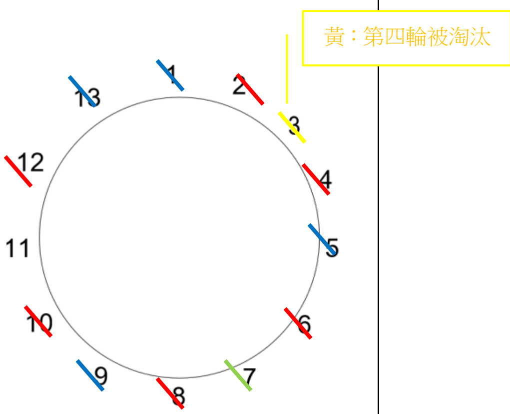
假設目前有 10 個人一起玩這個遊戲，這 10 個人裡，就只有一個人可以順利地擔任關主，那麼誰會成為這個幸運兒呢？首先，讓這 10 個人任意排列圍成一個圓圈，接著抽籤決定 1 號，右一為 2 號，右二為 3 號…依此類推，然後從 1 號開始往右數，2 號淘汰，接下來是 4、6、8、10 都一一被淘汰，第二輪的時候是 3、7 被淘汰，第三輪的時候是 1、9 被淘汰，最後的幸運兒就是序號 5 號。

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>抽籤決定 1 號</td>
<td>從 1 開始往右數，每隔一個即淘汰</td>
<td>第一輪淘汰後，剩下的幸運兒 1、3、5、7、9</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>第二輪淘汰 3、7</td>
<td>第二輪淘汰後，剩下的幸運兒 1、5、9</td>
<td>第三輪淘汰 1、9</td>
</tr>
</table>

		
幸運兒：5		

我們以 N 為 8~13 人為例，說明找尋幸運兒的步驟與方法，分別如下圖所示：

8 人	9 人	10 人
		
幸運兒：1	幸運兒：3	幸運兒：5

11 人	12 人	13 人
		
幸運兒：7	幸運兒：9	幸運兒：11

我們依照上面的方法徒手操作，依序整理 N＝1~ N＝63 的幸運兒序號，如下表所示：

N	幸運兒	N	幸運兒	N	幸運兒	N	幸運兒	N	幸運兒	N	幸運兒
1	1	2	1	4	1	8	1	16	1	32	1
		3	3	5	3	9	3	17	3	33	3
				6	5	10	5	18	5	34	5
				7	7	11	7	19	7	35	7
						12	9	20	9	36	9
						13	11	21	11	37	11
						14	13	22	13	38	13
						15	15	23	15	39	15
								24	17	40	17
								25	19	41	19
								26	21	42	21
								27	23	43	23
								28	25	44	25
								29	27	45	27
								30	29	46	29
								31	31	47	31
										48	33
										49	35
										50	37
										51	39
										52	41
										53	43
										54	45
										55	47
										56	49
										57	51
										58	53
										59	55
										60	57
										61	59
										62	61
										63	63

根據上表，我們找到了一些規律，如下：

(1) 只要 N ＝ 2^A，幸運兒就會從 1 開始。→$(N-2^A)+1$

(2) 每多一個人加入遊戲，幸運兒的位置(序號)就往後移兩位。→$(N-2^A)\times2+1$

(3) 幸運兒的序號永遠是奇數（因為偶數在第一輪就被淘汰了）。

(4) 每一組數列的個數與2^A(A=0、1、2、3⋯)相同。

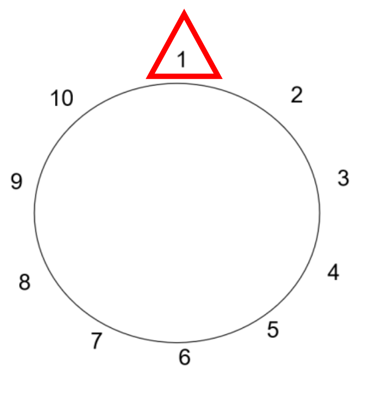
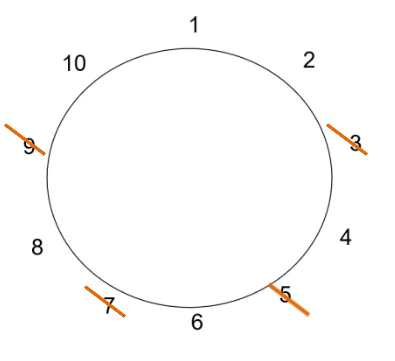
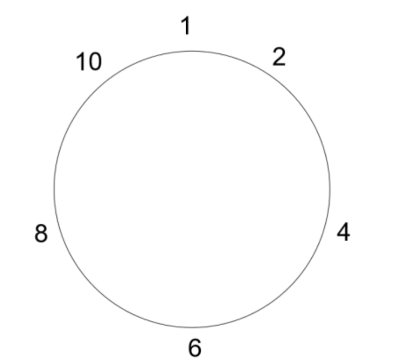
根據上列規則，我們試著推導公式，如下：

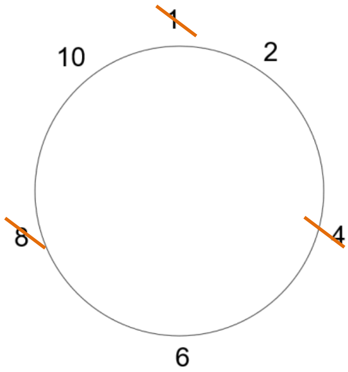
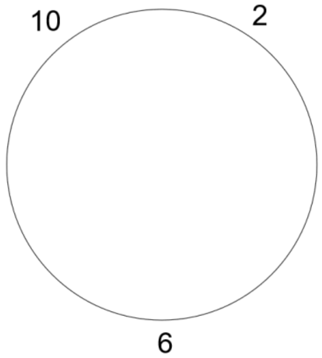
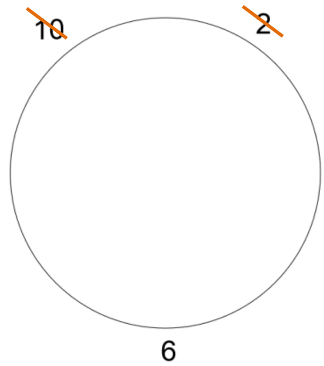
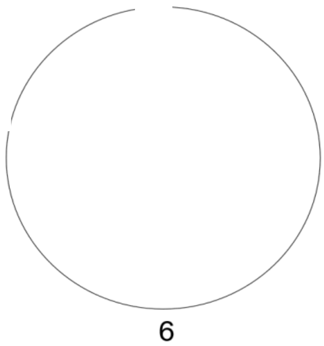
$\boxed{\text{幸運兒：}(N-2^A)\times2+1}$

註： A 為正整數的值要使 2^A 最接近 N (以下皆同)

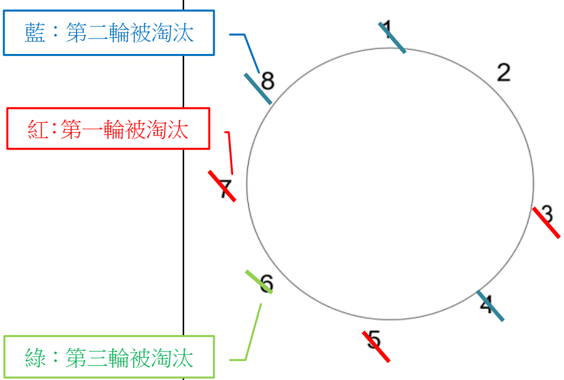
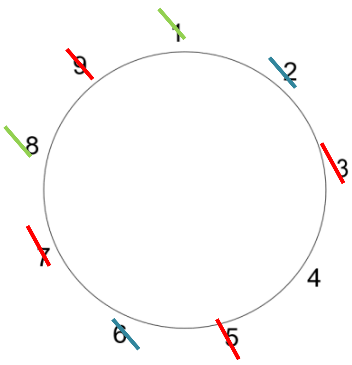
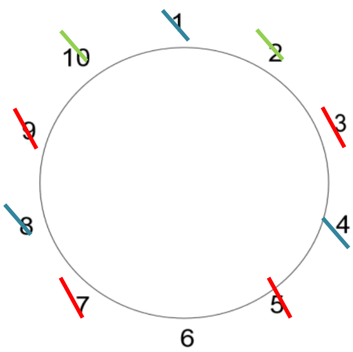
問題二: 找出 N 個人圍成圈時，第一輪不淘汰 2 的倍數，幸運兒的序號為何？

假設目前有 10 個人一起玩這個遊戲，這 10 個人裡，就只有一個人可以順利地擔任關主，那麼誰會成為這個幸運兒呢？首先，讓這 10 個人任意排列圍成一個圓圈，接著抽籤決定 1 號，右一為 2 號，右二為 3 號⋯依此類推，然後從 1 號開始往右數，遇到二的倍數則跳過不淘汰，第二輪開始淘汰，第一輪淘汰 3、5、7、9 號淘汰，接下來是 1、4、6 號被淘汰，第三輪的時候是 2、10 被淘汰，最後的幸運兒是序號 6 號。

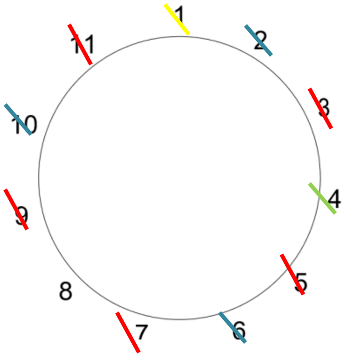
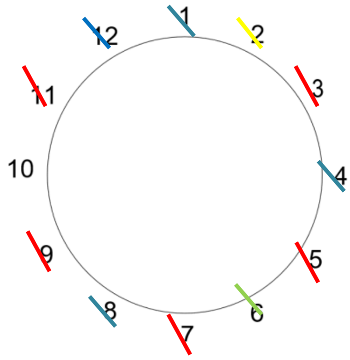
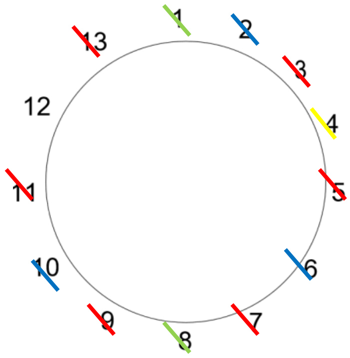
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>抽籤決定 1 號</td>
<td>從 1 開始往右數，遇二的倍數不淘汰</td>
<td>第一輪淘汰後，幸運兒 1、2、4、5、7、8、10</td>
</tr>
</table>

		
第二輪淘汰 1、4、8	剩下的幸運兒是 2、6、10	第三輪淘汰 2、10
		
剩下的幸運兒是 6		

我們以 N 為 8~13 人為例，說明找尋第一輪不淘汰 2 的倍數之幸運兒的步驟與方法：

8 人	9 人	10 人
		
幸運兒：2	幸運兒：4	幸運兒：6

黃：第四輪被淘汰

11 人	12 人	13 人
		
幸運兒：8	幸運兒：10	幸運兒：12

我們依照上面的方法徒手操作，依序整理 N＝1 ~ N＝62 的幸運兒序號，如下表所示：

N	幸運兒	N	幸運兒	N	幸運兒	N	幸運兒	N	幸運兒
1	1	3	1	7	1	15	1	31	1
2	2	4	2	8	2	16	2	32	2
		5	4	9	4	17	4	33	4
		6	6	10	6	18	6	34	6
				11	8	19	8	35	8
				12	10	20	10	36	10
				13	12	21	12	37	12
				14	14	22	14	38	14
						23	16	39	16
						24	18	40	18
						25	20	41	20
						26	22	42	22
						27	24	43	24
						28	26	44	26
						29	28	45	28
						30	30	46	30
								47	32
								48	34
								49	36
								50	38

								51	40
								52	42
								53	44
								54	46
								55	48
								56	50
								57	52
								58	54
								59	56
								60	58
								61	60
								62	62

根據上表，我們找到了一些規律，如下：

(1) 每一組數列都從2^A-1開始，其幸運兒序號都會是 1。

(2) 當 N 從2^A-1 → 2^A 時 ，其幸運兒序號相差 1，其餘差 2。

(3) 只要 N遇到2^A，幸運兒的序號就會從 2 開始。→(N-2^A)＋2

(5) N 從2^A之後，每多一個人加入遊戲，幸運兒的位置(序號)就往後移兩位。

→ (N-2^A)×2＋2

(4) 每一組數列的個數與2^A(A=1、2、3…)相同。

根據上列規律，我們找到了以下公式：

幸運兒：(N-2^A)ｘ2＋2

例外：N＝2^A－1，幸運兒皆為 1

問題三: 找出 N 個人圍成圈時，第一輪不淘汰 2n（n≧2），幸運兒的序號為何？

（一） 第一輪不淘汰 4 的倍數(N≧4)

我們依照上面的方法徒手操作，依序整理 N＝4～N＝62 的幸運兒，如下表所示：

N	幸運兒	N	幸運兒	N	幸運兒	N	幸運兒
3		7	1	15	1	31	1
4	3	8	3	16	3	32	3
5	4	9	4	17	4	33	4
6	6	10	6	18	6	34	6
		11	8	19	8	35	8
		12	10	20	10	36	10
		13	12	21	12	37	12
		14	14	22	14	38	14
				23	16	39	16
				24	18	40	18
				25	20	41	20
				26	22	42	22
				27	24	43	24
				28	26	44	26
				29	28	45	28
				30	30	46	30
						47	32
						48	34
						49	36
						50	38
						51	40
						52	42
						53	44
						54	46
						55	48
						56	50
						57	52
						58	54
						59	56
						60	58
						61	60
						62	62

根據上表，我們找到了一些規律，如下：

(1) 每一組數列都從2^A-1開始，其幸運兒序號都會是 1。

(2) 當 N 從 $2^A \rightarrow 2^A+1$時 ，其幸運兒序號相差 1，其餘皆相差 2。

(3) 只要 N遇到2^A-1，其幸運兒序號皆為 1；當 N 遇到 2^A，其幸運兒序號皆為 3。

(4) 只要 N遇到2^A+1，幸運兒的序號為 4，之後，每多一個人加入遊戲，幸運兒的位置(序號)就往後移兩位。

根據上列規律，我們找到了以下公式：

$\boxed{\text{幸運兒：}(N-2^A)\times 2+2}$

例外：

N＝2^A-1，幸運兒皆為 1

N＝2^A，幸運兒皆為 3

（二）第一輪不淘汰 6 的倍數(N≧6)

我們依照上面的方法徒手操作，依序整理 N＝6 ~ N＝62 的幸運兒，如下表所示：

N	幸運兒	N	幸運兒	N	幸運兒	N	幸運兒
3		7	1	15	1	31	1
4		8	3	16	3	32	3
5		9	5	17	5	33	5
6	6	10	6	18	6	34	6
		11	8	19	8	35	8
		12	10	20	10	36	10
		13	12	21	12	37	12
		14	14	22	14	38	14
				23	16	39	16
				24	18	40	18
				25	20	41	20

				26	22	42	22
				27	24	43	24
				28	26	44	26
				29	28	45	28
				30	30	46	30
						47	32
						48	34
						49	36
						50	38
						51	40
						52	42
						53	44
						54	46
						55	48
						56	50
						57	52
						58	54
						59	56
						60	58
						61	60
						62	62

根據上表，我們找到了一些規律，如下：

(1) 每一組數列都從的2^A-1開始，其幸運兒序號都會是 1。

(2) 當 N 從 $2^A+1 \rightarrow 2^A+2$ 時 ，其幸運兒序號相差 1，其餘皆相差 2。

(3) 只要N遇到 2^A-1，其幸運兒序號皆為 1；當 N 遇到 2^A，其幸運兒序號皆為 3，當 N 遇到 2^A+1，其幸運兒序號皆為 5。

(4) 只要N遇到2^A+2，幸運兒的序號為 6，之後，每多一個人加入遊戲，幸運兒的位置(序號)就往後移兩位。

根據上列規律，我們找到了以下公式：

$\boxed{\text{幸運兒：}(N-2^A)\times 2+2}$

例外：

N＝2^A－1，幸運兒皆為 1

N＝2^A，幸運兒皆為 3

N＝2^A＋1，幸運兒皆為 5

（三）第一輪不淘汰 8 的倍數 (N≧8)

我們依照上面的方法徒手操作，依序整理 N＝8～N＝62 的幸運兒，如下表所示：

N	幸運兒	N	幸運兒	N	幸運兒
7		15	1	31	1
8	3	16	3	32	3
9	5	17	5	33	5
10	7	18	7	34	7
11	8	19	8	35	8
12	10	20	10	36	10
13	12	21	12	37	12
14	14	22	14	38	14
		23	16	39	16
		24	18	40	18
		25	20	41	20
		26	22	42	22
		27	24	43	24
		28	26	44	26
		29	28	45	28
		30	30	46	30
				47	32
				48	34
				49	36
				50	38
				51	40
				52	42

				53	44
				54	46
				55	48
				56	50
				57	52
				58	54
				59	56
				60	58
				61	60
				62	62

根據上表，我們找到了一些規律，如下：

(1) 每一組數列都從的2^A-1開始，其幸運兒序號都會是 1。

(2) 當 N 從2^A+2 → 2^A+3時 ，其幸運兒序號相差 1，其餘皆相差 2。

(3) 只要N遇到 2^A-1，其幸運兒序號皆為 1；當 N 遇到 2^A，其幸運兒序號皆為 3，當 N 遇到 2^A+1，其幸運兒序號皆為 5，當 N 遇到 2^A+2，其幸運兒序號皆為 7。

(4) 只要N遇到2^A+3，幸運兒的序號為 8，之後，每多一個人加入遊戲，幸運兒的位置(序號)就往後移兩位。

根據上列規律，我們找到了以下公式：

$\boxed{\text{幸運兒：}(N-2^A)\times 2+2}$

例外：

N＝$\mathbf{2^A}-1$，幸運兒皆為 1

N＝$\mathbf{2^A}$，幸運兒皆為 3

N＝$\mathbf{2^A}+1$，幸運兒皆為 5

N＝$\mathbf{2^A}+2$，幸運兒皆為 7

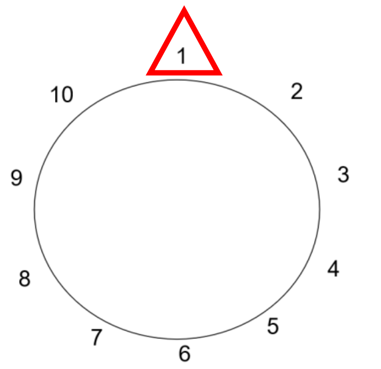
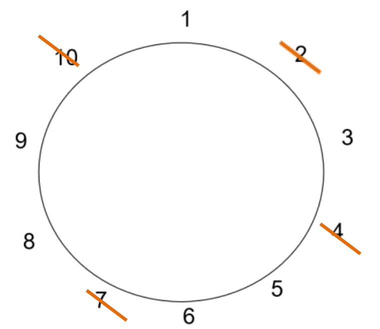
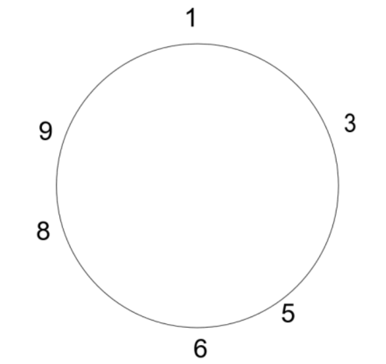
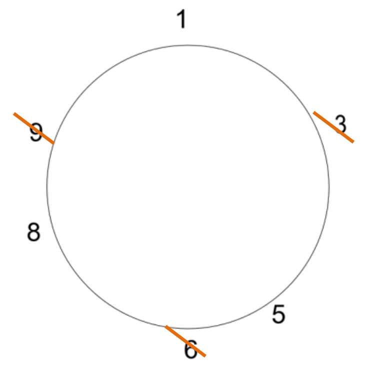
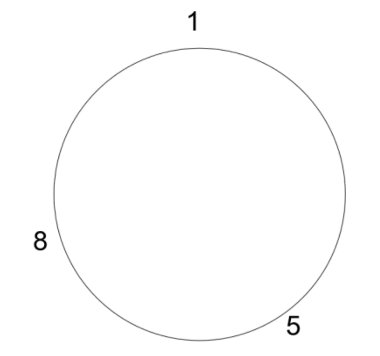
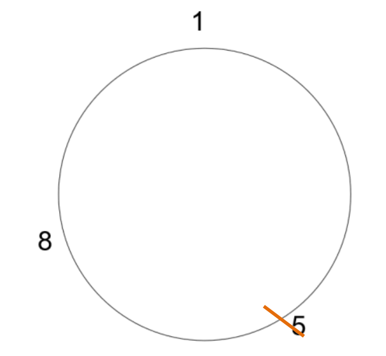
歸納例外

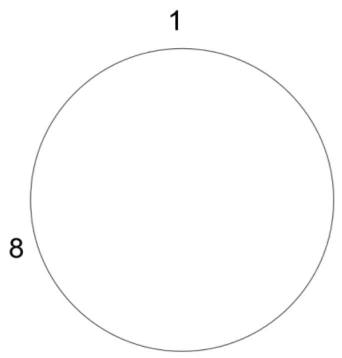
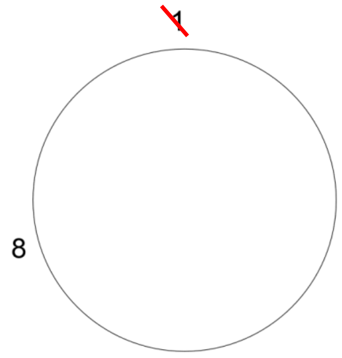
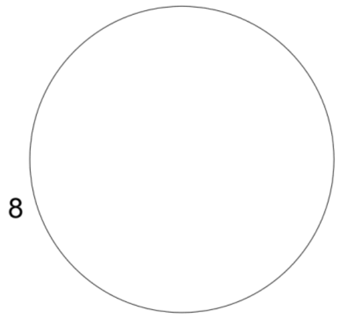
根據上列(一)~(四)規則，我們整理出 N 個人圍成圈時，第一輪不淘汰 $\boxed{2n}$ 的倍數，幸運兒的序號為 $(N-2^{A})\times 2+2$ ； 例外的部分如下表整理：

第一輪不淘汰	N	幸運兒
2 的倍數(N≧2)	$2^{A}-1$	1
4 的倍數(N≧4)	$2^{A}-1$	1
	2^{A}	3
6 的倍數(N≧6)	$2^{A}-1$	1
	2^{A}	3
	$2^{A}+1$	5
8 的倍數(N≧8)	$2^{A}-1$	1
	2^{A}	3
	$2^{A}+1$	5
	$2^{A}+2$	7
10 的倍數(N≧10)	$2^{A}-1$	1
	2^{A}	3
	$2^{A}+1$	5
	$2^{A}+2$	7
	$2^{A}+3$	9
⋮	⋮	⋮
2n 的倍數	$2^{A}+(a-2)$ $1\leqq a\leqq n$	2a-1

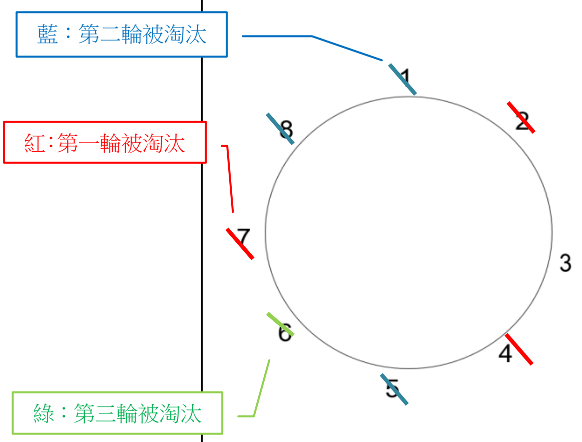
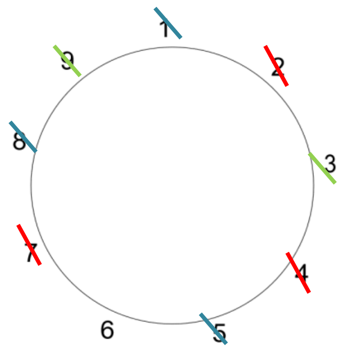
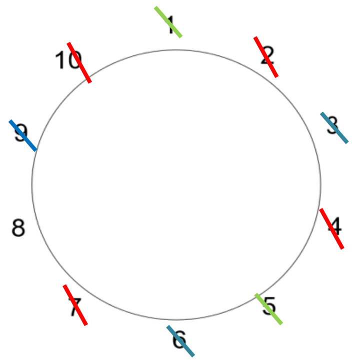
問題四: 找出 N 個人圍成圈時，第一輪不淘汰 3 的倍數，幸運兒的序號為何？

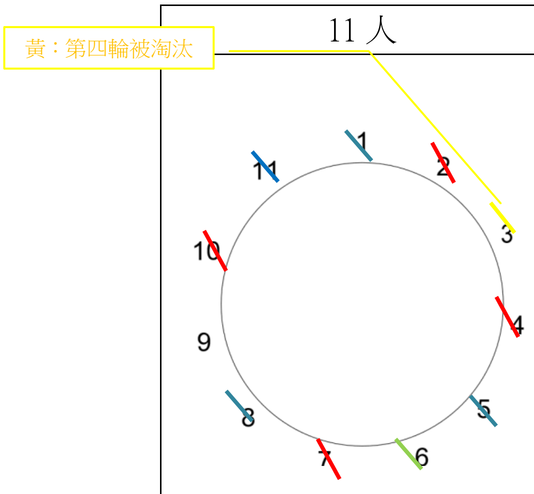
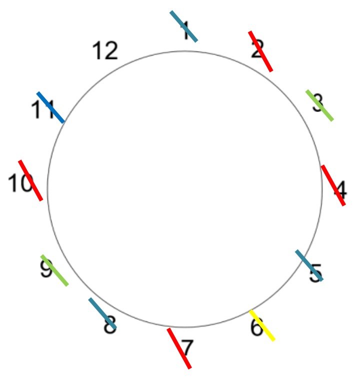
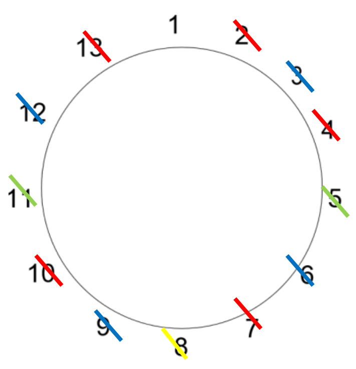
假設目前有 10 個人一起玩這個遊戲，這 10 個人裡，就只有一個人可以順利地擔任關主，那麼誰會成為這個幸運兒呢？首先，讓這 10 個人任意排列圍成一個圓圈，接著抽籤決定 1 號，右一為 2 號，右二為 3 號…依此類推，然後從 1 號開始往右數，遇到三的倍數則跳過不淘汰，第二輪開始淘汰，第一輪淘汰 2、4、7、10 號淘汰，接下來是 3、6、9 號被淘汰，第三輪的時候是 5 被淘汰，第四輪的時候是 1 被淘汰，最後的幸運兒就是序號 8 號。

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>抽籤決定 1 號</td>
<td>從 1 開始往右數，遇 3 的倍數不淘汰</td>
<td>第一輪淘汰後，幸運兒 1、3、5、6、8、9</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>第二輪淘汰 3、6、9</td>
<td>剩下的幸運兒是 1、5、8</td>
<td>第三輪淘汰 5</td>
</tr>
</table>

		
剩下的幸運兒是 1、8	第四輪淘汰 1	幸運兒：8

我們以 N 為 8~13 人為例，說明找尋第一輪不淘汰 3 的倍數之幸運兒的步驟與方法：

8 人	9 人	10 人
		
幸運兒：3	幸運兒：6	幸運兒：8

11 人	12 人	13 人
		
幸運兒：9	幸運兒：12	幸運兒：1

我們依照上面的方法徒手操作，依序整理 N＝1~ N＝96 的幸運兒，如下表所示：

N	幸運兒	N	幸運兒	N	幸運兒	N	幸運兒	N	幸運兒	N	幸運兒	N	幸運兒	
1	1	2	1	4	1	7	1	13	1	25	1	49	1	+2
		3	3	5	3	8	3	14	3	26	3	50	3	+3
				6	6	9	6	15	6	27	6	51	6	+2
	B1					10	8	16	8	28	8	52	8	+1
			B2			11	9	17	9	29	9	53	9	+3
						12	12	18	12	30	12	54	12	+2
					B3			19	14	31	14	55	14	+1
								20	15	32	15	56	15	+3
							B4	21	18	33	18	57	18	+2
								22	20	34	20	58	20	+1
								23	21	35	21	59	21	+3
								24	24	36	24	60	24	+2
										37	26	61	26	+1
										38	27	62	27	+3
									B5	39	30	63	30	+2
										40	32	64	32	+1
										41	33	68	33	+3
										42	36	66	36	+2
										43	38	67	38	+1
										44	39	68	39	+3
										45	42	69	42	+2
										46	44	70	44	+1
										47	45	71	45	+3
										48	48	72	48	+2
												73	50	+1
												74	51	+3
											B6	75	54	+2
												76	56	+1
												77	57	+3
												78	60	+2
												79	62	+1

												80	63	+3
												81	66	+2
												82	68	+1
												83	69	+3
												84	72	+2
												85	74	+1
												86	75	+3
												87	78	+2
											B7 →	88	80	+1
												89	81	+3
												90	84	+2
												91	86	+1
												92	87	+3
												93	90	+2
												94	92	+1
												95	93	+3
												96	96	

【歸納】根據上表，我們發現以下結論：

★此數列每項以+2、+3、+2、+1、+3、+2、+1、+3、+2、+1、+3……循環

★項次的個數呈現等比數列，如下：

B1 有 1 項

B2 有 2 項

B3 有 3 項 → 3×2^0項 → 總項數＝1+2+3

B4 有 6 項 → 3×2^1 項 → 總項數＝1+2+3+6

B5 有 12 項 → 3×2^2 項 → 總項數＝1+2+3+6+12

B6 有 24 項 → 3×2^3 項 → 總項數＝1+2+3+6+12+24

B7 有 48 項 → 3×2^4 項 → 總項數＝1+2+3+6+12+24+48

依此類推……

B_K有 $3 \times 2^{K-3}$ 項 → 總項數＝1+2+3+6+12+24⋯B_K

★解題步驟

步驟一：求 N 為第幾區間 $3 \times 2^{k-3} < N < 3 \times 2^{k-2}$ （K 為正整數，表示第幾區間）

步驟二：求此區間之前的總項數 $3 \times 2^{k-4} \times 2 = 3 \times 2^{k-3}$

步驟三：求 N 為該區間的第幾項 $N - (3 \times 2^{k-3})$

步驟四：$(N - 3 \times 2^{k-3}) - 3$ → 扣除前 3 項 (因為沒有循環)

步驟五：【$(N - 3 \times 2^{k-3}) - 3$】÷ 3 ＝ E⋯D (因為數列會依照+2、+1、+3⋯循環)

步驟六：幸運兒序號＝ 6＋6 × E＋C

前三項不循環數之和

註 1：6 ＝ B1+B2（因為此兩區間不循環）

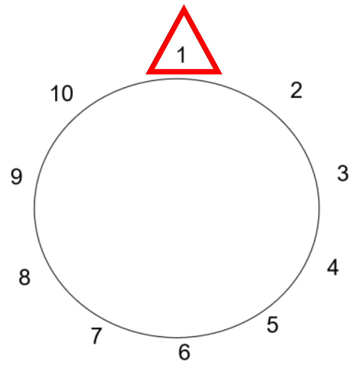
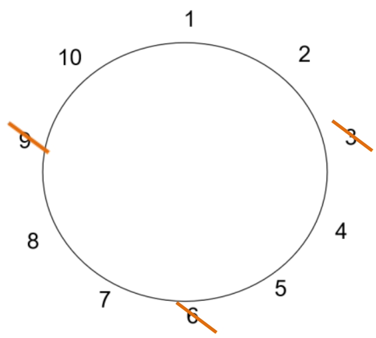
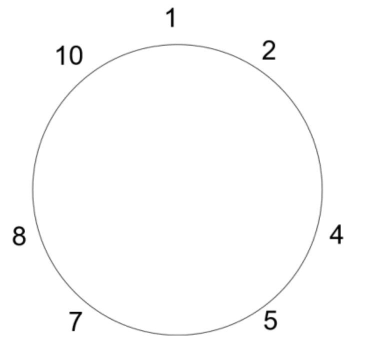
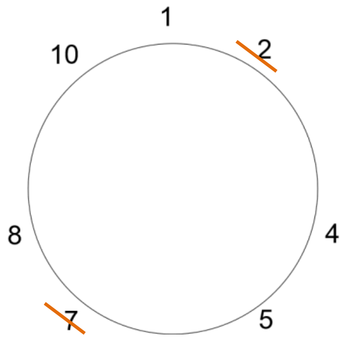
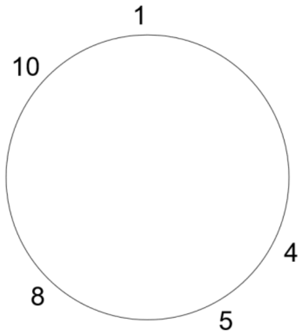
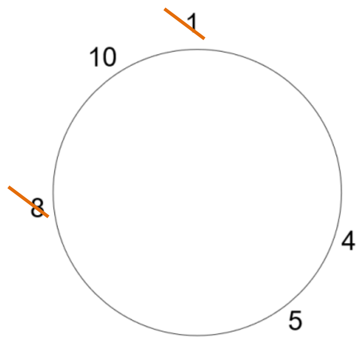
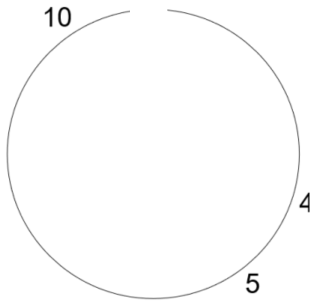
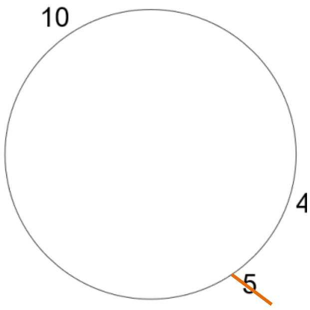
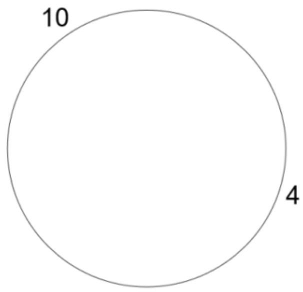
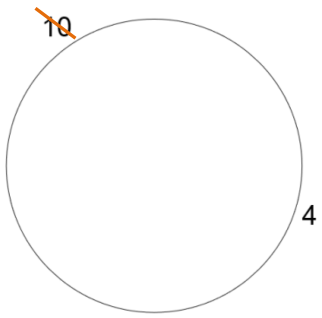
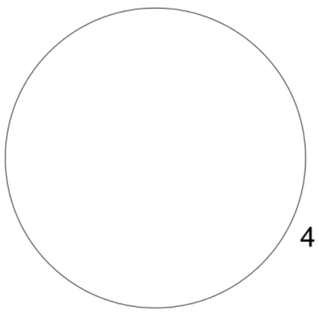
註 2：當 D＝0，C＝0

當 D＝1，C＝2

當 D＝2，C＝+2+1＝3

問題五: 找出 N 個人圍成圈時，每隔兩人淘汰一人，幸運兒的序號為何？

假設目前有 10 個人一起玩這個遊戲，這 10 個人裡，就只有一個人可以順利地擔任關主，那麼誰會成為這個幸運兒呢？首先，讓這 10 個人任意排列圍成一個圓圈，接著抽籤決定 1 號，右一為 2 號，右二為 3 號⋯依此類推，然後從 1 號開始往右數，3 號淘汰，接下來是 6、9 都一一被淘汰，第二輪的時候是 2、7 被淘汰，第三輪的時候是 1、8 被淘汰，第四輪的時候是 5 被淘汰，第五輪的時候是 10 被淘汰，最後的幸運兒就是序號 4 號。

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>抽籤決定 1 號</td>
<td>從 1 開始往右數，每隔二個即淘汰</td>
<td>第一輪淘汰後，幸運兒 1、2、4、5、7、8、10</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>第二輪淘汰 2、7</td>
<td>剩下幸運兒 1、4、5、8、10</td>
<td>第三輪淘汰 1、8</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>剩下的幸運兒是 4、5、10</td>
<td>第四輪淘汰 5</td>
<td>剩下的幸運兒是 4、10</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>第五輪淘汰 10</td>
<td>最後的幸運兒是 4</td>
<td></td>
</tr>
</table>

我們依照上面的方法徒手操作，依序整理 N＝6～N＝104 的幸運兒，如下表所示：

N	幸運兒	N	幸運兒	N	幸運兒	N	幸運兒	N	幸運兒	N	幸運兒	N	幸運兒
6	1	9	1	14	2	21	2	31	1	47	2	70	1
7	4	10	4	15	5	22	5	32	4	48	5	71	4
8	7	11	7	16	8	23	8	33	7	49	8	72	7
		12	10	17	11	24	11	34	10	50	11	73	10
		13	13	18	14	25	14	35	13	51	14	74	13
				19	17	26	17	36	16	52	17	75	16
				20	20	27	20	37	19	53	20	76	19
						28	23	38	22	54	23	77	22
						29	26	39	25	55	26	78	25
						30	29	40	28	56	29	79	28
								41	31	57	32	80	31
								42	34	58	35	81	34
								43	37	59	38	82	37
								44	40	60	41	83	40
								45	43	61	44	84	43
								46	46	62	47	85	46
										63	50	86	49
										64	53	87	52
										65	56	88	55
										66	59	89	58
										67	62	90	61
										68	65	91	64
										69	68	92	67
												93	70
												94	73
												95	76
												96	79
												97	82
												98	85
												99	88
												100	91

												101	94
												102	97
												103	100
												104	103

根據上表，我們找到了一些規律，如下：

(1) 當此區間的最後一個幸運兒的序號與參與遊戲總人數相同時，我們可以預測下一個區間的開始為 2。

(2) 當此區間的最後一個幸運兒的序號與參與遊戲總人數相差 1 時，我們可以預測下一個區間的開始為 1。

(3) 每一組數列，其幸運兒的位置皆差 3。

(4) 如何預測下一位幸運兒的位置。

（a） 先決定首數(參考前一數列結束時，其幸運兒的序號與參與遊戲總人數是否相同)。

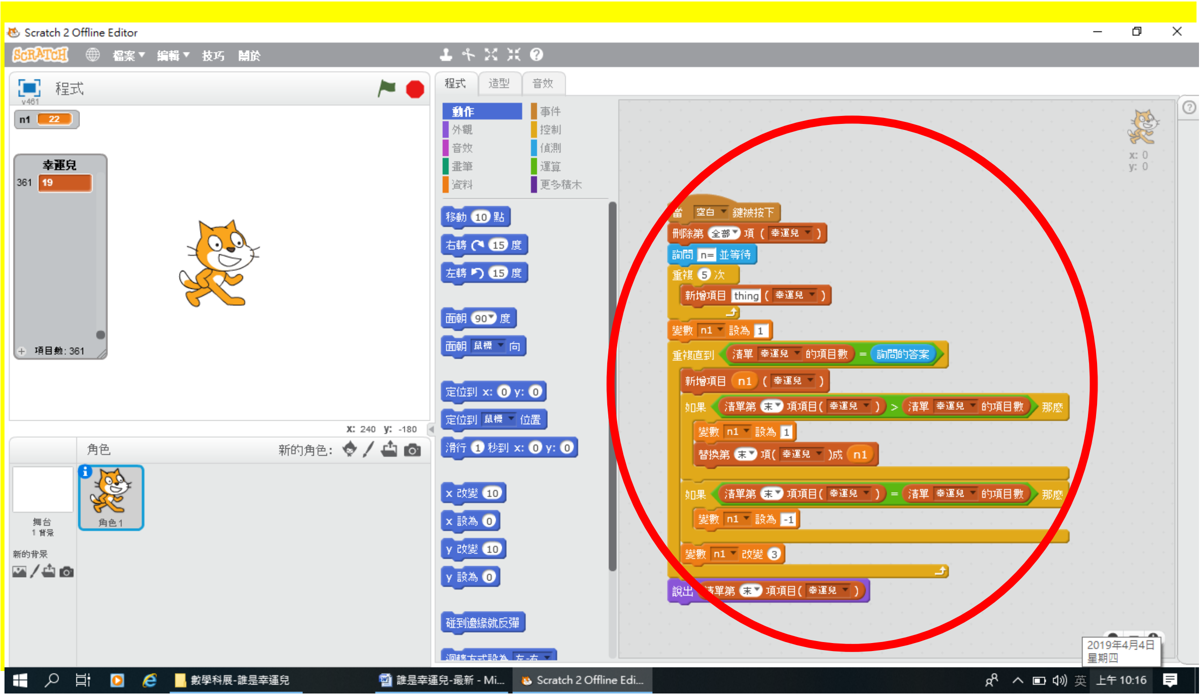
（b） 首數決定好之後依次加 3，即可以得到該數。亦可利用乘積的方式來取得幸運兒的位置。

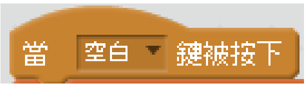
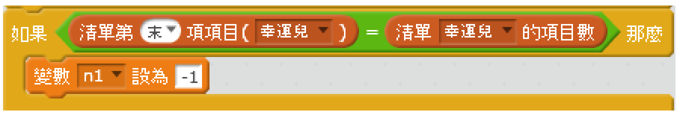
(5) **利用電腦 scratch 協助找出幸運兒的位置。**

我們利用電腦課所學的 **scratch 程式設計**，輸入指令，也就是參與遊戲的人數、幸運兒位置，再加入條件，即可在短時間內找到幸運兒的序號。

scratch 程式設計設計原理：

Scratch 將一般專業的程式設計指令轉化為簡單的積木方塊，只要將這些指令積木拖曳組合，就能簡單的完成程式設計。Scratch 開發平台的使用者介面分為四部分：程式模件列表、程式設計平台、預覽窗口和角色列表。程式模件列表將其分為 8 類：動作、外觀、聲音、畫筆、控制、偵測、運算、變數。程式模件各有不同的顏色和形狀，以便辨識。



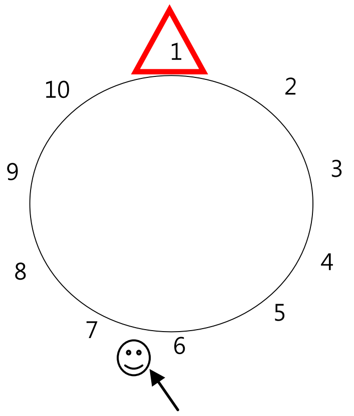
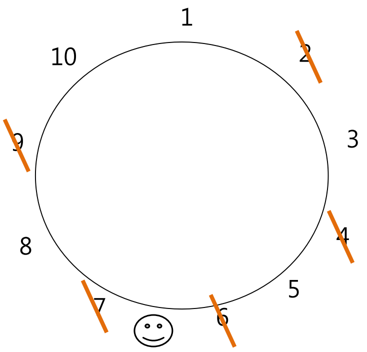
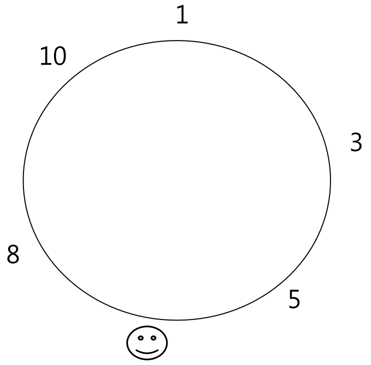
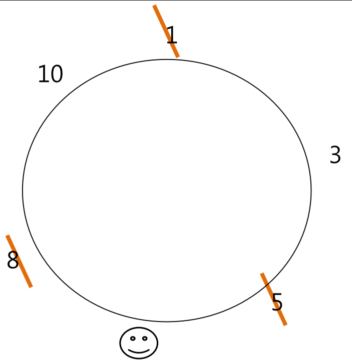
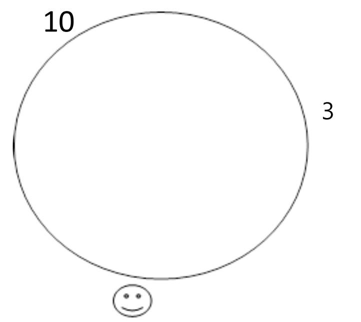
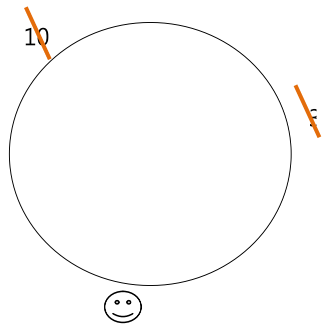
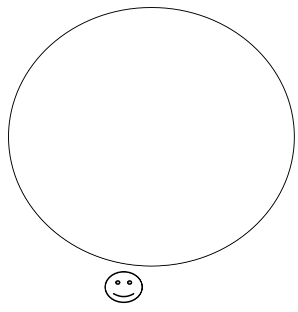
	設定按下空白鍵即程式開始
	空白鍵按下的同時，刪除上一次計算的紀錄
	詢問 N＝？
	因為當 N＝1~N＝5，不在此設定範圍（沒有規律性）
	n1 意指幸運兒，在此將 n1 變數的一開始設為 1，接者啟動程式，重複找到答案。
	當清單中的末項幸運兒序號＞N 時，幸運兒序號就會立即重新開始，也就是歸 1，所以此時將 n1 設為 1，再套入清單中。
	承上，當清單中的 N＝幸運兒序號時，下一個幸運兒序號會從 2 重新開始，此時要將 n1 設為 -1。
	承上，若非，則假設之事件就不會被觸發，此時 N＜幸運兒序號，則幸運兒依序+3 即可。
	程式結束，說出幸運兒序號

問題六：找出 N 個人圍成圈時，隨意加入一人(第一輪不淘汰)，此人要成為幸運兒，

其位置應該放在何處？

人要放哪才會成為幸運兒？

備註：此人第一輪會受到保護，跳過不淘汰！

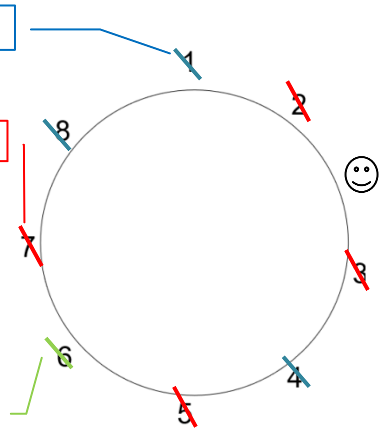
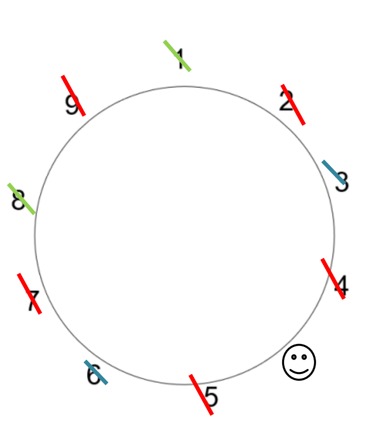
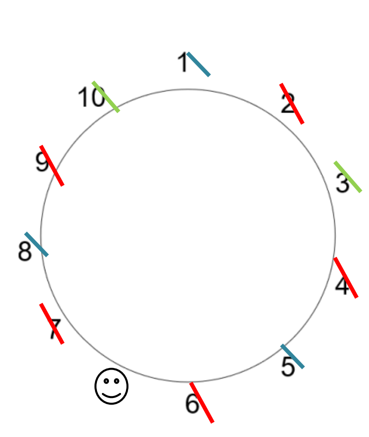
		
抽籤決定 1 號及人的位置	從 1 開始往右數，每隔一個即淘汰	第一輪淘汰，剩下的幸運兒 1、3、5、8、10、
		
第二輪淘汰 1、5、8	第二輪淘汰後，剩下的幸運兒 3、10、	第三輪淘汰 3、10
		
幸運兒：		

我們以 N 為 8~16 人為例，說明找尋途中任意插入一個人，而此人插入的位置剛好是幸運兒的步驟與方法：

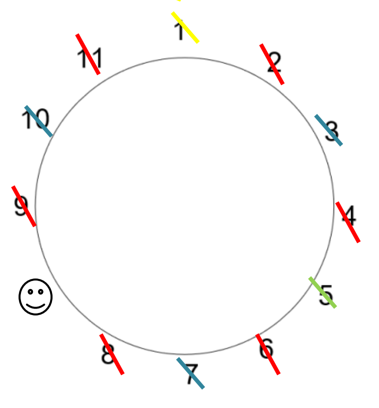
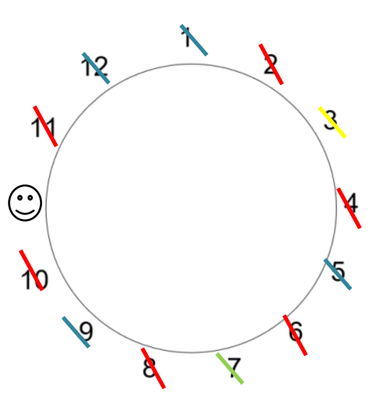
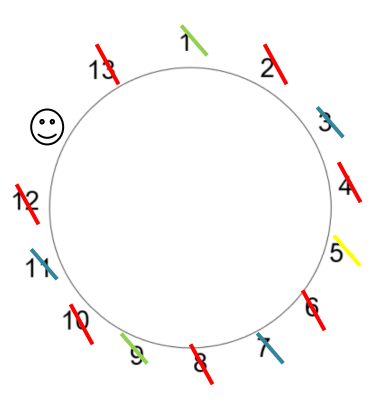
藍：第二輪被淘汰

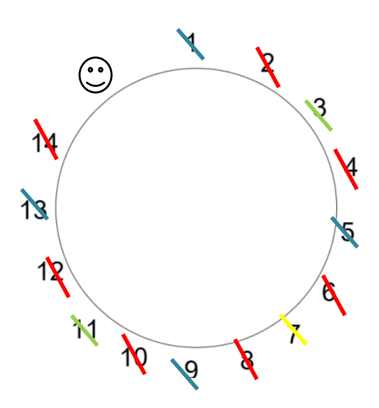
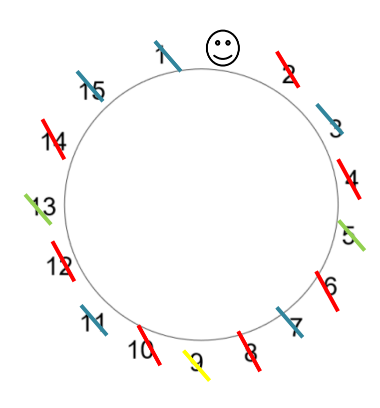
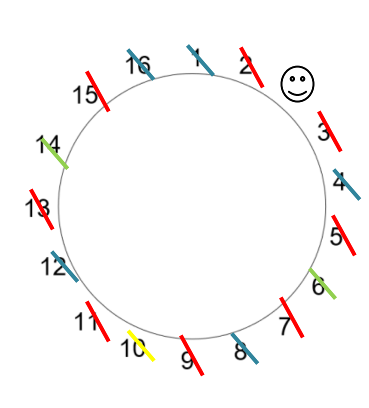
紅：第一輪被淘汰

綠：第三輪被淘汰

8 人	9 人	10 人
		
幸運兒位置：2~3	幸運兒：4~5	幸運兒：6~7

黃：第四輪被淘汰

11 人	12 人	13 人
		
幸運兒：8~9	幸運兒：10~11	幸運兒：12~13

14 人	15 人	16 人
		
幸運兒：14~1	幸運兒：1~2	幸運兒：2~3

N＝7 ~ N＝62 人時，隨意加入一人，此人剛好是幸運兒之位置(註：第一輪不淘汰)：

N	幸運兒	N	幸運兒	N	幸運兒
7	1~2	15	1~2	31	1~2
8	2~3	16	2~3	32	2~3
9	4~5	17	4~5	33	4~5
10	6~7	18	6~7	34	6~7
11	8~9	19	8~9	35	8~9
12	10~11	20	10~11	36	10~11
13	12~13	21	12~13	37	12~13
14	14~1	22	14~15	38	14~15
		23	16~17	39	16~17
		24	18~19	40	18~19
		25	20~21	41	20~21
		26	22~23	42	22~23
		27	24~25	43	24~25
		28	26~27	44	26~27
		29	28~29	45	28~29
		30	30~1	46	30~31
				47	32~33
				48	34~35
				49	36~37
				50	38~39
				51	40~41
				52	42~43
				53	44~45
				54	46~47
				55	48~49
				56	50~51
				57	52~53
				58	54~55
				59	56~57
				60	58~59
				61	60~61
				62	62~1

根據上表，我們找到了一些規律，如下：

(1) 只要 N 遇到2^A-1，幸運兒序號就會從 1~2 區間開始。

(2) 每多一個人加入遊戲，插入的幸運兒的位置就會往後移 2 位。

(3) 當 N 從$2^A-1 \rightarrow 2^A$ 時例外，插入的幸運兒的位置只會往後移 1 位。

(4) 每一組數列的個數與2^A(A=3、4、5……)相同。

根據上表，我們找到了公式，如下：

$\boxed{(N+1-2^A)\times 2}$ ∽ $\boxed{(N+1-2^A)\times 2+1}$

例外：當 N=2^A-1 ， 插入的幸運兒位置為 1~2。

陸、 結論

(一) 找出 N 個人圍成圈時，每隔一人淘汰一人，幸運兒的序號為何？

幸運兒：$(N-2^A)\times 2+1$

(二) 找出 N 個人圍成圈時，第一輪不淘汰 2 的倍數，幸運兒的序號為何？

幸運兒：$(N-2^A)\times 2+2$

例外：N＝2^A-1，幸運兒皆為 1

(三) 找出 N 個人圍成圈時，第一輪不淘汰 2n（n≧2）的倍數，幸運兒的序號為何？

$(N-2^A)\times 2+2$

歸納例外：

第一輪不淘汰	N	幸運兒
2 的倍數	2^A-1	1
4 的倍數	2^A-1	1
	2^A	3
6 的倍數	2^A-1	1
	2^A	3

	2^A+1	5
8 的倍數	2^A-1	1
	2^A	3
	2^A+1	5
	2^A+2	7
10 的倍數	2^A-1	1
	2^A	3
	2^A+1	5
	2^A+2	7
	2^A+3	9
⋮	⋮	⋮
2n 的倍數	$2^A+(a-2)$ $1\leqq a\leqq n$	2a-1

(四) 找出 N 個人圍成圈時，第一輪不淘汰 3 的倍數，幸運兒的序號為何？

★解題步驟

步驟一： $3\times2^{k-3} < N < 3\times2^{k-2}$ （K 為正整數，表示第幾區間）

步驟二： $3\times2^{k-4}\times2 = 3\times2^{k-3}$

步驟三： $N-(3\times2^{k-3})$

步驟四： $(N-3\times2^{k-3})-3$

步驟五： 【$(N-3\times2^{k-3})-3$】$\div 3 =$ E…D

步驟六： $6+6\times E+C$

註：當 D＝0，C＝0

當 D＝1，C＝2

當 D＝2，C＝+2+1＝3

(五) 找出 N 個人圍成圈時，每隔兩人淘汰一人，幸運兒的序號為何？

利用電腦 scratch 程式設計，輸入 N 即可找出幸運兒的位置。

(六) 找出 N 個人圍成圈時，隨意加入一人(第一輪不淘汰)，此人要成為幸運兒，其位置應該放在何處？

$(N+1-2^{A})\times 2 \backsim (N+1-2^{A})\times 2+1$

例外：當 N=$\mathbf{2^{A}-1}$ ， 插入的幸運兒位置為 1~2。

柒、 心得與感想

很高興可以加入數學科展這個團隊，回想將近一年的研究過程，我們學會了如何發現問題、解決問題、驗證答案。我們也常常會遇到很多的瓶頸，但為了突破瓶頸，我們更學會如何尋求新的數學知識來解決所遇到的困難，每當解出問題答案的那一瞬間，我們的心就雀躍不已，那片刻的興奮難以言喻，而我們真的很享受這種解題的快感！

在過去的這一年，很感謝數學團隊的所有夥伴，因為有你們一路上的支持陪伴，讓我有勇氣嘗試各種挫敗，雖然我們有時會因為意見不同而起爭執，卻在無形之中培養了彼此之間的最佳默契，共同完成了這次的使命，此次數學探究之旅，感謝一路上有你們的陪伴與鼓勵。

我們這次研究的主題是「海盜船上的幸運兒」，是生活中常見的遊戲，除了運用基本的數學解題技巧，同時也結合了電腦課所學的 scratch 程式，用最快的方法尋求解答，最後謝謝老師辛苦的帶領我們一步一步地去探索生活中的數學之美，參加科展，讓我深深感受到原來數學是可以這麼有趣。

捌、 參考資料

康軒（2018）。國中數學第四冊　第一單元　等差數列與等差級數

龍騰文化（2017）。高中數學第二冊　第二章　數列與級數