摘要

本研究從「雙心多邊形其旁心 n 邊形和內切圓切點 n 邊形面積成等比且相似」為靈感，將雙心條件放寬為圓外切四邊形，觀察面積等比關係是否繼續存在或作了何種改變，後來延伸到圓外切多邊形時發現奇數多邊形因為能證明旁心 n 邊形和內切圓切點 n 邊形相似，我們證明了其必為雙心多邊形，偶數多邊形因不相似，我們利用每一層圓心角的性質變化，觀察到偶數多邊形面積變化規則。

壹、研究動機

在上專題研究課的時候，老師介紹了歷屆全國科展得獎作品，當介紹到第56屆全國科展中「層層疊疊-雙心多邊形面積的一個有趣性質」時，內容提到雙心多邊形其旁心n邊形和內切圓切點n邊形面積成等比且相似，於是我們問老師如果把雙心條件放寬為圓外切多邊形會有相同等比的關係嗎？如果沒有，能不能往外一直作圖延伸出去呢？再來逆命題會對嗎？相似能否保證雙心呢？於是開始了我們的研究。

貳、研究目的

一、探討圓外切四邊形其旁心四邊形與內切圓切點四邊形面積的關係。

二、探討察圓外切四邊形的旁心四邊形與內切圓切點四邊形如果在沒有相似的條件下，是否能往外不斷作旁心四邊形的外接圓與圓外切四邊形的步驟，到某一層時回到相似。

三、探討需具備什麼條件，才能讓多邊形有外接圓。

四、推廣到圓外切N邊形是否也存在面積的關係。

五、探討旁心N邊形與內切圓切點N邊形若相似，則是否必為雙心多邊形。

參、研究器材

紙、筆、GSP 數學繪圖軟體，利用繪圖軟體計算輔助自己的研究。

肆、文獻探討

在第56屆全國科展中「層層疊疊-雙心多邊形面積的一個有趣性質」中，與本研究的異同之處如下：

一、　文獻中證明若多邊形為雙心，則其旁心n邊形和內切圓切點n邊形會相似，我們證明了逆命題也成立。

二、　文獻中證明雙心n邊形與旁心n邊形與內切圓切點n邊形三者面積成等比，我們證明圓外切偶數邊形不會相似，奇數邊形則因為外接圓的充要條件的限制條件較強，所以必為雙心多邊形。

三、　文獻因為雙心多邊形的旁心n邊形和內切圓切點n邊形會相似，所以利用邊長的平方比得到面積比，我們的研究內容中分為兩種，偶數邊形因為沒有相似，所以從四邊形討論起，利用半徑和圓心角來推三角形邊長計算出面積得到面積比，到多邊形時則發現每往外一層的圓心角與內層的圓心角存在某種關係，因此解決了面積比問題，奇數邊形則在外接圓條件造成相似，因此我們證明了若旁心n邊形和內切圓切點n邊形相似，則圓外切多邊形必為雙心多邊形。。

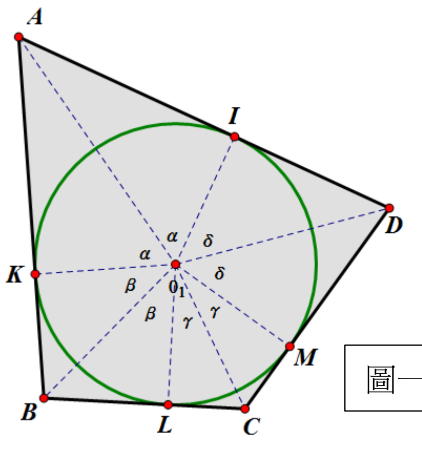
伍、研究過程

一、圓外切四邊形的討論

(一)首先，我們利用內切圓半徑與圓心角來計算圓外切四邊形面積，

定理一　設圓外切四邊形ABCD的內切圓半徑為r，圓心為O_1，則四邊形ABCD面積=

$\frac{r^2 \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha+\delta)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta}$(參圖一)



圖一

〔證明〕

令內切圓半徑為r，則$\overline{AI}=\overline{AR}=r\tan\alpha$、$\overline{BL}=\overline{KB}=r\tan\beta$、

$\overline{CL}=\overline{CM}=r\tan\gamma$、$\overline{DM}=\overline{DI}=r\tan\delta$

四邊形ABCD面積 $=\mathrm{r}^2(\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma+\tan\delta)$

$$=r^2\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}+\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}+\frac{\sin\delta}{\cos\delta}\right)$$

$$=r^2\left(\frac{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta+\sin\beta\cos\alpha\cos\gamma\cos\delta+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta\cos\delta+\sin\delta\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta}\right)$$

$$=r^2\left(\frac{\sin(\alpha+\beta)(\cos\gamma\cos\delta)+\sin(\gamma+\delta)\,(\cos\alpha\cos\beta)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta}\right)$$

$$=r^2\left(\frac{\sin(\alpha+\beta)(\frac{\cos(\gamma+\delta)+\cos(\gamma-\delta)}{2})+\sin(\gamma+\delta)\,(\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2})}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta}\right)$$

$\because \alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$

$$=r^2\left(\frac{\sin(\alpha+\beta)(\frac{-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\gamma-\delta)}{2})+\sin(\alpha+\beta)\,(\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2})}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta}\right)$$

$$=r^2\left(\frac{\sin(\alpha+\beta)(\frac{-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\gamma-\delta)}{2}+\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2})}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta}\right)$$

$$=r^2\left(\frac{\sin(\alpha+\beta)(\frac{2\cos\frac{\gamma-\delta+\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta-\alpha+\beta}{2}}{2})}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta}\right)$$

$$=r^2\left(\frac{\sin(\alpha+\beta)(\cos\frac{2\gamma+2\alpha-\pi}{2}\cos\frac{2\delta+2\alpha-\pi}{2})}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta}\right)$$

$=\frac{r^2\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha+\delta)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta}$ ，得證。

(二)接下來計算內切圓切點四邊形的面積

$\boxed{\text{定理二}}$ 連接四邊形 ABCD 的內切圓切點 I、K、L、M，

則四邊形 IKLM 面積= $2r^2\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha+\delta)$

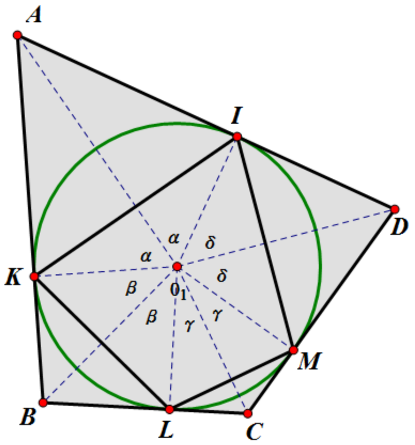
〔證明〕

如圖二，$\because$ $\overline{IK} = 2\,r\,sin\,\alpha$ 、$\overline{KL} = 2\,r\,sin\,\beta$ 、$\overline{LM} = 2\,r\,sin\,\gamma$ 、$\overline{IM} = 2\,r\,sin\,\delta$

$$\Delta IKL = \frac{1}{2}\,\overline{IK}\,\overline{KL}\,sin(\gamma+\delta)$$

$$= \frac{1}{2}\;2\,r\,sin\,\alpha\;\,2\,r\,sin\,\beta\;\,sin(\gamma+\delta)$$

$$= 2\,r^2\,sin\,\alpha\,sin\,\beta\;\,sin(\gamma+\delta)$$



圖二

同理，ΔIML

$$= 2\,r^2\,sin\,\gamma\,sin\,\delta\;\,sin(\alpha+\beta)$$

$\therefore$ $\Delta IKL + \Delta IML$

$$= 2\,r^2\,sin\,\alpha\,sin\,\beta\;\,sin(\gamma+\delta) + 2\,r^2\,sin\,\gamma\,sin\,\delta\;\,sin(\alpha+\beta)$$

$$= 2\,r^2\,sin(\alpha+\beta)\,(sin\,\alpha\,sin\,\beta + sin\,\gamma\,sin\,\delta)$$

$$= 2\,r^2\,sin(\alpha+\beta)\,(\frac{-\,cos(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta)-cos(\gamma+\delta)+cos(\gamma-\delta)}{2})$$

$$= 2\,r^2\,sin(\alpha+\beta)\,(\frac{cos(\alpha-\beta)+cos(\gamma-\delta)}{2})$$

$$= 2\,r^2\,sin(\alpha+\beta)\,(\frac{cos(\alpha-\beta)+cos(\gamma-\delta)}{2})$$

$$= 2\,r^2\,sin(\alpha+\beta)\,(\frac{2\,cos(\frac{\alpha-\beta+\gamma-\delta}{2})\,cos(\frac{\alpha-\beta-\gamma+\delta}{2})}{2})$$

$$= 2\,r^2\,sin(\alpha+\beta)\,cos(180^\circ-\alpha-\gamma)\;\,cos(180^\circ-\alpha-\delta)$$

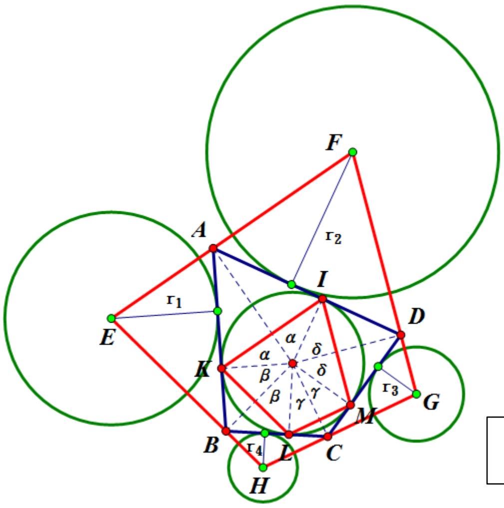
$$= 2r^2\,sin(\alpha+\beta)\,sin(\alpha+\gamma)\,sin(\alpha+\delta)$$

得證。

接下來為了求出旁心四邊形的面積，我們必須算出其邊長，而過程當中需使用到四個旁心圓的半徑，但為了求得面積的比值，於是旁心圓半徑需統一用內切圓 O 的半徑r與圓心角來表示。

引理一

設四邊形 ABCD 的旁心分別為 E、F、G、H，圓 E 半徑 r_1，圓 F 半徑 r_2，圓 G 半徑 r_3，圓 H 半徑 r_4，則$r_1 = r\tan\alpha\tan\beta$、$r_2 = r\tan\alpha\tan\delta$、$r_3 = r\tan\gamma\tan\delta$、$r_4 = r\tan\gamma\tan\beta$。



圖三

〔證明〕

如圖三，

$\because r_1 cot\,\alpha\ + r_1\,cot\,\beta\ = \overline{AB} = r\,tan\,\alpha\ +\ r\,tan\,\beta$

$\Rightarrow r_1\left(\dfrac{1}{tan\,\alpha}+\dfrac{1}{tan\,\beta}\right) = r(tan\,\alpha + tan\,\beta)$

$\Rightarrow r_1\left(\dfrac{tan\,\alpha + tan\,\beta}{tan\,\alpha\ \ tan\,\beta}\right) = r(tan\,\alpha + tan\,\beta)$

$\therefore r_1 = r\,tan\,\alpha\,tan\,\beta$

同理可證

$r_2 = r\tan\alpha\tan\delta$，$r_3 = r\tan\gamma\tan\delta$，$r_4 = r\tan\gamma\tan\beta$ 。

從圖形中可得知，旁心四邊形與內切圓切點四邊形雖然四邊皆互相平行但不相似，以下是我們的證明。

引理二　圓外切四邊形 ABCD 的旁心四邊形 EFGH 與內切圓切點四邊形 KIML 的四邊分別平行，但不相似。

〔證明〕

如圖四，先說明平行，

$\because \angle EAO = \angle AKO = 90^\circ$，$\angle OAK = 90^\circ - \alpha$，

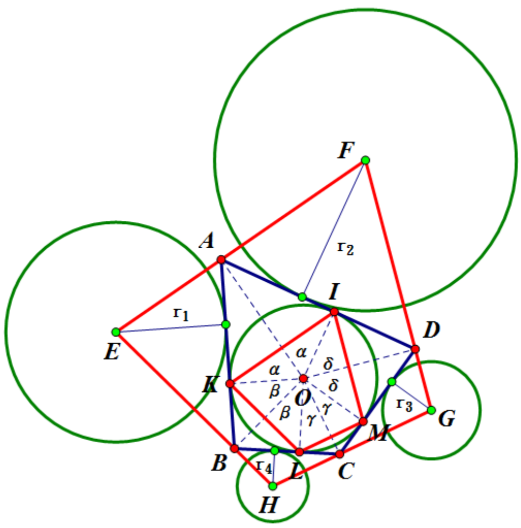
$\angle EAK = 90^\circ - 90^\circ + \alpha = \alpha$，$\therefore \overline{KI} \parallel \overline{EF}$

同理可證$\overline{IM} \parallel \overline{FG}$，$\overline{ML} \parallel \overline{GH}$，$\overline{KL} \parallel \overline{EH}$。

再說明邊長不成比例，

$\because \overline{EF} = \dfrac{1}{sin\,\alpha}\ (r\,tan\,\alpha\,tan\,\beta + r\,tan\,\alpha\,tan\,\delta)$

$\overline{IK} = 2r\,sin\,\alpha$ ，



圖四

$$\therefore \frac{\overline{EF}}{\overline{IK}} = \frac{\frac{1}{\sin\alpha}\ (r\tan\alpha\tan\beta + r\tan\alpha\tan\delta)}{2r\sin\alpha} = \frac{r\tan\alpha\ \ (\tan\beta + \tan\delta)}{2r\sin\alpha^2}$$

$$= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(\frac{\sin\beta}{\cos\beta} + \frac{\sin\delta}{\cos\delta})}{2\sin\alpha^2} = \frac{\frac{1}{\cos\alpha}\ (\frac{\sin\beta}{\cos\beta} + \frac{\sin\delta}{\cos\delta})}{2\sin\alpha} = \frac{\frac{\sin(\beta+\delta)}{\cos\beta\cos\delta}}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$= \frac{\sin(\beta+\delta)}{2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta\cos\delta}$$

同理可得

$$\frac{\overline{FG}}{\overline{IM}} = \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{2\sin\delta\cos\alpha\cos\delta\cos\gamma}$$

$\therefore \frac{\overline{EF}}{\overline{IK}} \neq \frac{\overline{FG}}{\overline{IM}}$，因此旁心四邊形與內切點四邊形不相似。

(三)最後計算旁心四邊形的面積

定理三

旁心四邊形 EFGH 面積$= \frac{1}{2}\left(\frac{r\sin(\alpha+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta}\right)^2 \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha+\delta)$

〔證明〕

如圖四，

$$\overline{FE} = \frac{1}{\sin\alpha}(r_1 + r_2) = \frac{1}{\sin\alpha} r\tan\alpha\ \ (\tan\beta + \tan\delta) = \frac{r}{\cos\alpha}\left(\frac{\sin(\beta+\delta)}{\cos\beta\cos\delta}\right)$$

$= \dfrac{r\sin(\beta+\delta)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\delta}$ 同理

$\overline{EH} = \frac{r}{\cos\alpha}\left(\frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma}\right)$且$\angle FEH = \pi - \alpha - \beta$，

$$\therefore \Delta FEH = \frac{1}{2}\ \overline{FE}\ \overline{EH}\sin(\alpha+\beta)$$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{r\sin(\beta+\delta)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\delta}\ \frac{r\sin(\alpha+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\sin(\alpha+\beta)$$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{r\sin(\alpha+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta}\right)^2\ \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\gamma\cos\delta}$同理

$$\Delta FGH = \frac{1}{2}\left(\frac{r\sin(\beta+\delta)}{\cos\gamma\cos\delta}\right)^2\ \frac{\sin(r+\delta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$\Delta FEH + \Delta FGH$

$$= \frac{1}{2}\frac{(r\sin(\alpha+\gamma))^2}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta}\left[\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin(\gamma+\delta)}{\cos\gamma\cos\delta}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{r\,sin(\alpha+\gamma)}{cos\,\alpha\,cos\,\beta\ \ cos\,\gamma\,cos\,\delta}\right)^2 sin(\alpha+\beta)\,[cos\,\alpha\,cos\,\beta+cos\,\gamma\,cos\,\delta]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{r\,sin(\alpha+\gamma)}{cos\,\alpha\,cos\,\beta\ \ cos\,\gamma\,cos\,\delta}\right)^2 sin(\alpha+\beta)\left[\frac{cos(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta)+cos(\gamma+\delta)+cos(\gamma-\delta)}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{r\,sin(\alpha+\gamma)}{cos\,\alpha\,cos\,\beta\ \ cos\,\gamma\,cos\,\delta}\right)^2 sin(\alpha+\beta)\left[\frac{2\,cos\left(\frac{\alpha-\beta+\gamma-\delta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha-\beta-\gamma+\delta}{2}\right)}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{r\,sin(\alpha+\gamma)}{cos\,\alpha\,cos\,\beta\ \ cos\,\gamma\,cos\,\delta}\right)^2 sin(\alpha+\beta)\,cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta-\delta\right)\ sin(\frac{\pi}{2}-\beta-\gamma)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{r\,sin(\alpha+\gamma)}{cos\,\alpha\,cos\,\beta\ \ cos\,\gamma\,cos\,\delta}\right)^2 sin(\alpha+\beta)\,sin(\alpha+\gamma)\,sin(\alpha+\delta)\quad\text{得證。}$$

討論一

1. 由定理一、三可知

$$\frac{\textit{旁心四邊形EFGH面積}}{\textit{四邊形ABCD面積}}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{r\,sin(\alpha+\gamma)}{cos\,\alpha\,cos\,\beta\ \ cos\,\gamma\,cos\,\delta}\right)^2 sin(\alpha+\beta)\,sin(\alpha+\gamma)\,sin(\alpha+\delta)}{\frac{r^2\,sin(\alpha+\beta)\,sin(\alpha+\gamma)\,sin(\alpha+\delta)}{cos\,\alpha\,cos\,\beta\,cos\,\gamma\,cos\,\delta}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{sin(\alpha+\gamma)}{cos\,\alpha\,cos\,\beta\,cos\,\gamma\,cos\,\delta}\right)^2}{\frac{1}{cos\,\alpha\,cos\,\beta\,cos\,\gamma\,cos\,\delta}}=\frac{1}{2}\frac{sin^2(\alpha+\gamma)}{cos\,\alpha\,cos\,\beta\,cos\,\gamma\,cos\,\delta}$$

2.而由定理一、二可知

$$\frac{\textit{四邊形ABCD面積}}{\textit{內切圓切點四邊形IKLM面積}}=\frac{\frac{r^2\,sin(\alpha+\beta)\,sin(\alpha+\gamma)\,sin(\alpha+\delta)}{cos\,\alpha\,cos\,\beta\,cos\,\gamma\,cos\,\delta}}{2r^2\,sin(\alpha+\beta)\,sin(\alpha+\gamma)\,sin(\alpha+\delta)}$$

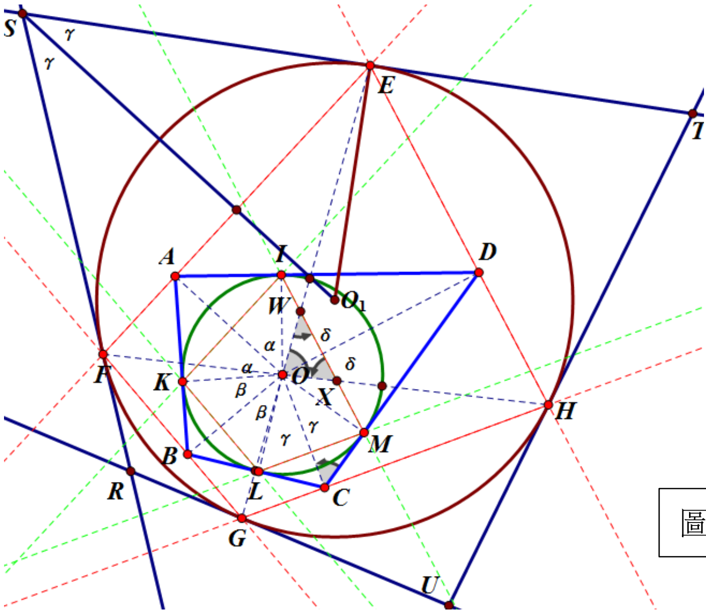
$$=\frac{1}{2cos\,\alpha\,cos\,\beta\,cos\,\gamma\,cos\,\delta}$$

3.從上述二個比值當中，我們發現當雙心四邊形條件成立時，$\alpha+\gamma=90°$，此時兩比值相等，於是面積會成等比，這讓我們對雙心四邊形其旁心四邊形與內切圓切點四邊形面積為何會成等比的原因更加了解。

4.令我們好奇的是，如果面積不成等比，那如果繼續往外作圖下去呢？由引理二我們知道旁心四邊形四邊會和內切圓切點四邊形四邊平行，所以它一定有外接圓(對角互補)，如果繼續做切線所得四邊形是否會和 ABCD 相似呢？還是說往外作到某一層才會開始相似？這是我們所好奇的，因此，我們去觀察下一層四邊形的四個角是否和之前的四邊形有關係。

$\boxed{\text{引理三}}$　過旁心四邊形 EFGH 的外接圓 O_1 上切點 E、F、G、H，分別作切線所得之圓外切四邊形 STUR 中，$\angle S = 2\gamma$，$\angle T = 2\beta$，$\angle U = 2\alpha$，$\angle R = 2\delta$。

〔證明〕



圖五

如圖五已知圓外切四邊形的內心為其旁心四邊形兩對角線的交點

(證明請見參考資料一，P12)，

$\because \angle WOX = \frac{\widehat{EH}+\widehat{FG}}{2}$(圓內角)、

且$\angle OWX = \angle OEH$(引理二)$= \frac{\widehat{GH}}{2}$、且$\angle WXO = \angle EHF$(引理二)$= \frac{\widehat{EF}}{2}$

$\Rightarrow \angle S = \frac{\widehat{EHGF} - \widehat{FE}}{2} = \angle WOX + \angle OWX - \angle WXO = 180° - 2\angle WXO$

$\because$ O、D、H、C 共圓($\angle OCH = \angle JDH = 90°$)，

$\therefore \angle WXO = \angle DHO = \angle DCO$ (圓周角)

$\Rightarrow \angle S = 180° - 2\,\angle DCO = 180° - \angle MCL = 2\gamma$

同理可證

$\angle S = 2\gamma$，$\angle T = 2\beta$，$\angle U = 2\alpha$，$\angle R = 2\delta$，得證。

由引理三讓我們窺見了四邊形往外作圖循環的規律，因此可以開始探討面積的比值。

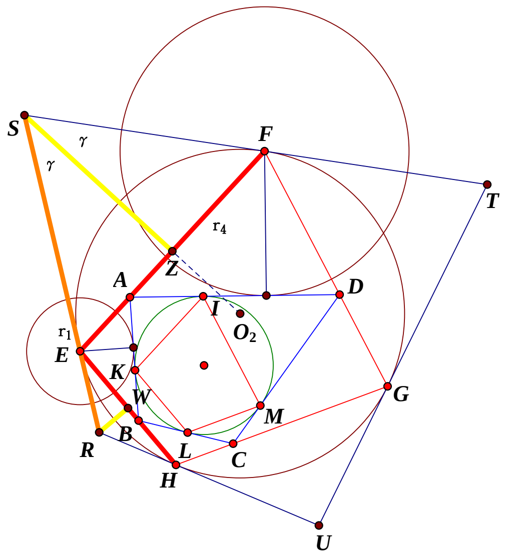
$\boxed{\text{討論二}}$

由討論一和定理三可知

$\frac{\text{四邊形}STUR\text{面積}}{\text{四邊形}EFGH\text{面積}} = \frac{1}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta}$，為了確定這個結果，我們做了以下驗算

〔證明〕

如圖六，根據引理三，



圖六

$$\overline{EF}=2\,\overline{SZ}\tan\gamma=\frac{r\ \sin(\beta+\delta)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\delta}$$

$$\therefore\ \overline{SZ}=\frac{r\ \sin(\beta+\delta)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\delta\tan\gamma}$$

同理

$$\overline{RW}=\frac{r\ \sin(\alpha+\gamma)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\tan\delta}$$

$$\Rightarrow\overline{SR}=\frac{\overline{SZ}}{\cos\gamma}+\frac{\overline{RW}}{\cos\delta}$$

$$\overline{SR}=\frac{\left(\frac{r\ \sin(\beta+\delta)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\delta\tan\gamma}\right)}{\cos\gamma}+\frac{\left(\frac{r\ \sin(\alpha+\gamma)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\tan\delta}\right)}{\cos\delta}$$

$$=\frac{\left(\frac{r\ \sin(\beta+\delta)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\delta\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}}\right)}{\cos\gamma}+\frac{\left(\frac{r\ \sin(\alpha+\gamma)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\frac{\sin\delta}{\cos\delta}}\right)}{\cos\delta}$$

$$=\frac{r\ \sin(\beta+\delta)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\delta\sin\gamma}+\frac{r\ \sin(\alpha+\gamma)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin\delta}$$

$$=\frac{r\ \sin(\alpha+\gamma)}{2\cos\alpha\cos\beta}\left(\frac{1}{\cos\gamma\sin\delta}+\frac{1}{\sin\gamma\cos\delta}\right)$$

$$=\frac{r\ \sin(\alpha+\gamma)}{2\cos\alpha\cos\beta}\left(\frac{\cos\gamma\sin\delta+\sin\gamma\cos\delta}{\cos\gamma\sin\delta\sin\gamma\cos\delta}\right)$$

$$=\frac{r\ \sin(\alpha+\gamma)}{2\cos\alpha\cos\beta}\left(\frac{\sin(\gamma+\delta)}{\cos\gamma\sin\delta\sin\gamma\cos\delta}\right)$$

$$=\frac{r\ \sin(\alpha+\gamma)\ \sin(\gamma+\delta)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta\sin\delta\sin\gamma}$$

同理

$$\overline{ST}=\frac{r\ \sin(\alpha+\gamma)\ \sin(\beta+\gamma)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta\sin\beta\sin\gamma}$$

$$\Delta STR\text{面積}=\frac{1}{2}\overline{ST}\ \overline{SR}\sin 2\gamma$$

$$\Delta STR=\frac{r\ \sin(\alpha+\gamma)\ \sin(\gamma+\delta)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta\sin\delta\sin\gamma}\cdot\frac{r\ \sin(\alpha+\gamma)\ \sin(\beta+\gamma)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta\sin\beta\sin\gamma}\cdot\sin 2\gamma$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{r\ \sin(\alpha+\gamma)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta}\right)^2\cdot\frac{r\ \sin(\gamma+\delta)\ \sin(\beta+\gamma)}{\sin\delta\sin^2\gamma\sin\beta}2\sin\gamma\cos\gamma$$

$$=\left(\frac{r\ \sin(\alpha+\gamma)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta}\right)^2\cdot\frac{r\ \sin(\gamma+\delta)\ \sin(\beta+\gamma)}{\sin\delta\sin\beta\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}}$$

$$=\left(\frac{r\ \sin(\alpha+\gamma)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta}\right)^2\cdot\frac{r\ \sin(\gamma+\delta)\ \sin(\beta+\gamma)}{\sin\delta\sin\beta\tan\gamma}$$

同理，$\Delta UTR=\left(\frac{r\ \sin(\alpha+\gamma)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta}\right)^2\cdot\frac{r\ \sin(\delta+\alpha)\ \sin(\beta+\alpha)}{\sin\delta\sin\beta\tan\alpha}$

$\Rightarrow$ 四邊形 STUR 面積 =

$$\left(\frac{r\ \sin(\alpha+\gamma)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta}\right)^2\frac{r\ \sin(\gamma+\delta)\ \sin(\beta+\gamma)}{\sin\delta\sin\beta\tan\gamma}+\left(\frac{r\ \sin(\alpha+\gamma)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta}\right)^2\frac{r\ \sin(\delta+\alpha)\ \sin(\beta+\alpha)}{\sin\delta\sin\beta\tan\alpha}$$

$$=\left(\frac{r\ \sin(\alpha+\gamma)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta}\right)^2\frac{\sin(\gamma+\delta)\ \sin(\beta+\gamma)}{\sin\delta\sin\beta}\left(\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\gamma}\right)$$

$$=\left(\frac{r\ \sin(\alpha+\gamma)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta}\right)^2\frac{\sin(\gamma+\delta)\ \sin(\beta+\gamma)}{\sin\delta\sin\beta}\left(\frac{\sin(\gamma+\alpha)}{\sin\alpha\sin\gamma}\right)$$

$$=\left(\frac{r\ \sin(\alpha+\gamma)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta}\right)^2\frac{\sin(\gamma+\delta)\ \sin(\beta+\gamma)\sin(\gamma+\alpha)}{\sin\delta\sin\beta\sin\alpha\sin\gamma}$$

$$=\left(\frac{r\ \sin(\alpha+\gamma)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta}\right)^2\frac{\sin(\gamma+\delta)\ \sin(\beta+\gamma)\sin(\gamma+\alpha)}{\sin\delta\sin\beta\sin\alpha\sin\gamma}$$

$$\therefore\frac{\text{四邊形 STUR 面積}}{\text{四邊形 EFGH 面積}}$$

$$=\frac{\left(\frac{r\ \sin(\alpha+\gamma)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta}\right)^2\frac{\sin(\gamma+\delta)\ \sin(\beta+\gamma)\sin(\gamma+\alpha)}{\sin\delta\sin\beta\sin\alpha\sin\gamma}}{\frac{1}{2}\left(\frac{r\sin(\alpha+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta}\right)^2\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha+\delta)}$$

$$=\frac{1}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta}$$

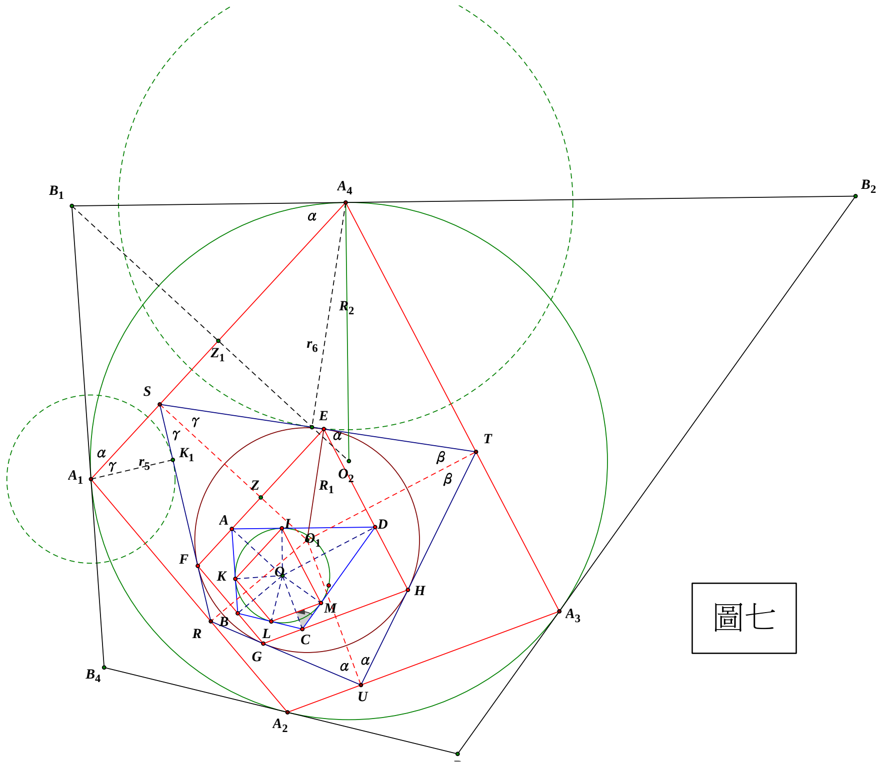
得證。

由討論二讓我們更確定內切圓圓 O 的圓心角與旁心四邊形外接圓圓 O_1 的圓心角會作彼此互換的推論，於是如果繼續往外重覆動作作圖，因為圓心角將會重複回到內切圓時候的四個角，所以圖形開始相似，這時便可將面積比看為圓半徑平方比來解決，接下來我們計算半徑比。

討論三

令四邊形 IKLM 之外接圓 O 半徑 r，四邊形 EFGH 之外接圓 O_1 半徑 R_1，四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 之外接圓 O_2 半徑 R_2，則

$\frac{R_1}{r}=\frac{\sin(\beta+\delta)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta}$ ，$\frac{R_2}{R_1}=\frac{\sin(\beta+\delta)}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta}$ 。



圖七

如圖七，$\because\ \overline{SE}=\dfrac{\overline{SZ}}{\cos\gamma}=\dfrac{\frac{r\ \sin(\beta+\delta)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\delta\tan\gamma}}{\cos\gamma}=\dfrac{r\ \sin(\beta+\delta)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\delta\sin\gamma}$，

又 $R_1=\overline{EO_1}=\overline{SE}\tan\gamma$

$$=\frac{r\ \sin(\beta+\delta)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\delta\sin\gamma}\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}=\frac{r\ \sin(\beta+\delta)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\delta\cos\gamma}$$

$$\therefore \frac{R_1}{r}=\frac{\frac{r\ \sin(\beta+\delta)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\delta\cos\gamma}}{r}=\frac{\sin(\beta+\delta)}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\delta\cos\gamma}$$

令旁心圓 A₁ 的半徑為r_5，則

$$r_5=R_1\cot\gamma\cot\delta=\frac{R_1}{\tan\gamma\tan\delta}$$

同理旁心圓 A₄的半徑$r_6=\dfrac{R_1}{\tan\gamma\tan\beta}$

$$\because\ 2\frac{\overline{B_1Z_1}}{\tan\alpha}=\overline{A_1A_4}=\frac{r_5}{\cos\gamma}+\frac{r_6}{\cos\gamma}=\frac{1}{\cos\gamma}\left(\frac{R_1}{\tan\gamma\tan\delta}+\frac{R_1}{\tan\beta\tan\gamma}\right)$$

$$=\frac{R_1}{\cos\gamma\tan\gamma}\left(\frac{1}{\tan\delta}+\frac{1}{\tan\beta}\right)$$

$$\therefore \overline{B_1Z_1}=\frac{R_1\tan\alpha}{2\sin\gamma}\left(\frac{\cos\delta}{\sin\delta}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right)=\frac{R_1\tan\alpha}{2\sin\gamma}\left(\frac{\cos(\beta+\delta)}{\sin\beta\sin\delta}\right)$$

又$R_2=\dfrac{\overline{B_1Z_1}}{\tan\alpha}\cdot\dfrac{1}{\sin\alpha}=\dfrac{R_1\tan\alpha}{2\sin\gamma}\left(\dfrac{\cos(\beta+\delta)}{\sin\beta\sin\delta}\right)\dfrac{1}{\tan\alpha\sin\alpha}=\dfrac{R_1}{2\sin\gamma}\left(\dfrac{\cos(\beta+\delta)}{\sin\beta\sin\delta}\right)\dfrac{1}{\sin\alpha}$

$\therefore \dfrac{R_2}{R_1}=\dfrac{\cos(\beta+\delta)}{2\sin\alpha\sin\gamma\sin\beta\sin\delta}$ ，得證。

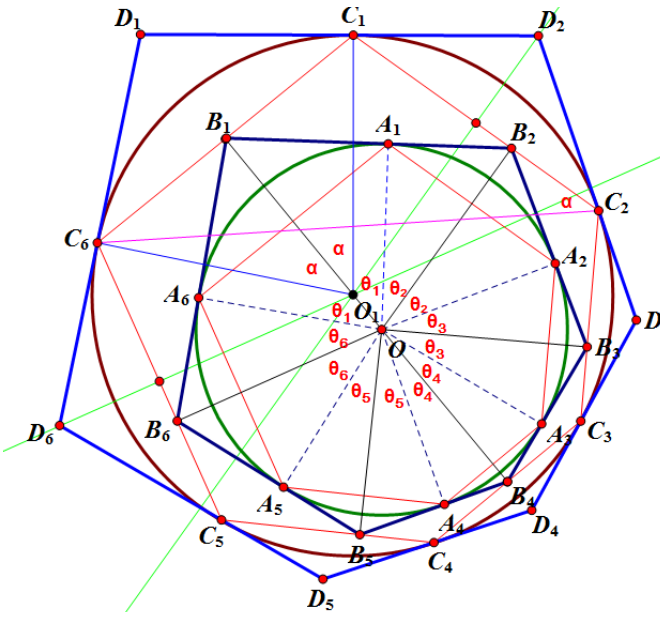
小結

觀察圖七，由引理三得知，當我們將圓外切四邊形 ABCD 往外作旁心四邊形 EFGH，因對角互補所以一定有外接圓 O_1，再分別過旁心四邊形的四個頂點 E、F、G、H 作圓的切線得四邊形 STUR，再作 STUR 的旁心四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，同樣一定有接圓，再作切線得四邊形 $B_1B_2B_3B_4$，再作其旁心四邊形 $C_1C_2C_3C_4$，……不斷重複向外延伸作圖。則由引理三、討論三可知，圓外切四邊形部份可分作兩組相似，同理旁心四邊形也是。

1. 四邊形 ABCD~四邊形$B_1B_2B_3B_4$~四邊形$F_1F_2F_3F_4$~ …，
2. 四邊形 STUR~四邊形$D_1D_2D_3D_4$~四邊形$H_1H_2H_3H_4$~ …，
3. 以上兩組與旁心的兩組面積比值皆為$\{\frac{\left[2\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)\right]^2}{\sin A\sin B\sin C\sin D}\}^2$。

二、圓外切六邊形的探討：

研究初期，曾嘗試想學四邊形用內切圓半徑r和圓心角θ_1~θ_6算出三者面積比，但我們發現圓內接四邊形因為條件非常強所以能夠造成比值非常簡潔漂亮，但六邊形面積並無法整理成適合的算式讓我們得到面積比，這問題在我們發現四邊形圓心角會循環後給了我們靈感繼續往多邊形方向研究。



圖八

(一)旁心六邊形$C_1C_2C_3C_4C_5C_6$外接圓圓O_1半徑R_1的求法

圓外切六邊形$B_1B_2B_3B_4B_5B_6$的旁心六邊形$C_1C_2C_3C_4C_5C_6$，此時若旁心六邊形有外接圓時，其半徑R_1又應該怎麼求呢？如果要解決這個問題必須要有圓O_1的圓心角，我們發現旁心六邊形$C_1C_2C_3C_4C_5C_6$外接圓的圓心角是由其對角線與邊長之夾角所構成。

定理四

如圖八，圓外切六邊形$B_1B_2B_3B_4B_5B_6$，其內切圓圓O半徑為r，圓心角為$\theta_1 \sim \theta_6$，其旁心六邊形$C_1C_2C_3C_4C_5C_6$外接圓圓O_1半徑為R_1，則

$$\frac{R_1}{r} = \frac{\sqrt{\left(\frac{sin(\theta_1+\theta_3)}{cos\,\theta_3}\right)^2 + \left(\frac{sin(\theta_2+\theta_6)}{cos\,\theta_6}\right)^2 + 2\cdot\frac{sin(\theta_1+\theta_3)\,sin(\theta_2+\theta_6)\,cos(\theta_1+\theta_2)}{cos\theta_3\,cos\,\theta_6}}}{2sin(\theta_1+\theta_2)\cdot cos\theta_1\,cos\,\theta_2}$$

〔證明〕

如圖八，連接$\overline{C_2C_6}$

首先由正弦定理

$$\frac{sin\,\alpha}{\overline{C_1C_6}} = \frac{sin(\angle c_2c_1c_6)}{\overline{C_2C_6}} = \frac{sin(\pi-\theta_1-\theta_2)}{\overline{C_2C_6}} = \frac{sin(\theta_1+\theta_2)}{\overline{C_2C_6}} \quad ......(I)$$

又$\because \overline{C_1C_2} = \overline{C_1B_2} + \overline{B_2C_2} = \frac{r_1}{sin\,\theta_2} + \frac{r_2}{sin\,\theta_2}$

由引理一

$$\overline{C_1C_2} = \frac{1}{sin\,\theta_2}(r\,tan\,\theta_1\,tan\,\theta_2 + r\,tan\,\theta_2\,tan\,\theta_3)$$

$$= \frac{r}{sin\,\theta_2}\left(\frac{sin\,\theta_1\,sin\,\theta_2}{cos\,\theta_1\,cos\,\theta_2} + \frac{sin\,\theta_2\,sin\,\theta_3}{cos\,\theta_2\,cos\,\theta_3}\right)$$

$$= \frac{r}{sin\,\theta_2}\left(\frac{sin\,\theta_1\,sin\,\theta_2\,cos\,\theta_3 + cos\,\theta_1\,sin\,\theta_2\,sin\,\theta_3}{cos\,\theta_1\,cos\,\theta_2\,cos\,\theta_3}\right)$$

$$= r\left(\frac{sin\,\theta_1\,cos\,\theta_3 + cos\,\theta_1\,sin\,\theta_3}{cos\,\theta_1\,cos\,\theta_2\,cos\,\theta_3}\right)$$

$$= r\left(\frac{sin(\theta_1+\theta_3)}{cos\,\theta_1\,cos\,\theta_2\,cos\,\theta_3}\right)$$

同理$\overline{C_1C_6} = r\left(\frac{sin(\theta_2+\theta_6)}{cos\,\theta_1\,cos\,\theta_2\,cos\,\theta_6}\right)$

由餘弦定理，

$$\overline{C_2C_6}^2 = \overline{C_1C_2}^2 + \overline{C_1C_6}^2 - 2\,\overline{C_1C_2}\cdot\overline{C_1C_6}\,cos\,(\pi-\theta_1-\theta_2)$$

$$= r^2\left(\frac{sin(\theta_1+\theta_3)}{cos\,\theta_1\,cos\,\theta_2\,cos\,\theta_3}\right)^2 + r^2\left(\frac{sin(\theta_2+\theta_6)}{cos\,\theta_1\,cos\,\theta_2\,cos\,\theta_6}\right)^2$$

$$+2\cdot r\left(\frac{sin(\theta_1+\theta_3)}{cos\,\theta_1\,cos\,\theta_2\,cos\,\theta_3}\right)\cdot r\left(\frac{sin(\theta_2+\theta_6)}{cos\,\theta_1\,cos\,\theta_2\,cos\,\theta_6}\right)\cdot cos\,(\theta_1+\theta_2)$$

$$\therefore C_2C_6=\sqrt{r^2\left(\frac{sin(\theta_1+\theta_3)}{cos\,\theta_1\,cos\,\theta_2\,cos\,\theta_3}\right)^2+r^2\left(\frac{sin(\theta_2+\theta_6)}{cos\,\theta_1\,cos\,\theta_2\,cos\,\theta_6}\right)^2+2\cdot r\left(\frac{sin(\theta_1+\theta_3)}{cos\,\theta_1\,cos\,\theta_2\,cos\,\theta_3}\right)\cdot r\left(\frac{sin(\theta_2+\theta_6)}{cos\,\theta_1\,cos\,\theta_2\,cos\,\theta_6}\right)cos\,(\theta_1+\theta_2)}$$

......(II)

由(I)和(II)可得$R_1=\frac{C_1C_6}{2\sin\alpha}=\frac{C_2C_6}{2\sin(\theta_1+\theta_2)}$

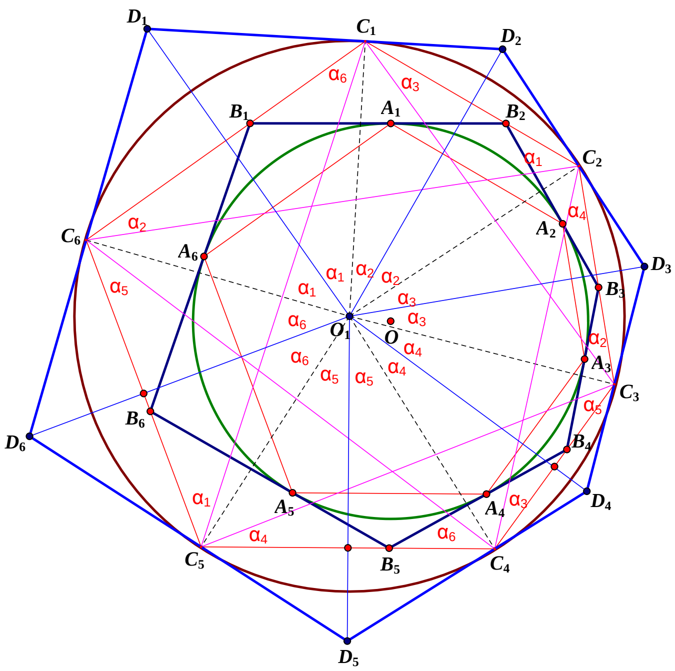
$$=\frac{\sqrt{r^2\left(\frac{sin(\theta_1+\theta_3)}{cos\,\theta_1\,cos\,\theta_2\,cos\,\theta_3}\right)^2+r^2\left(\frac{sin(\theta_2+\theta_6)}{cos\,\theta_1\,cos\,\theta_2\,cos\,\theta_6}\right)^2+2\cdot r\left(\frac{sin(\theta_1+\theta_3)}{cos\,\theta_1\,cos\,\theta_2\,cos\,\theta_3}\right)\cdot r\left(\frac{sin(\theta_2+\theta_6)}{cos\,\theta_1\,cos\,\theta_2\,cos\,\theta_6}\right)cos\,(\theta_1+\theta_2)}}{2sin(\theta_1+\theta_2)}$$

$$=\frac{\frac{r}{cos\,\theta_1\,cos\,\theta_2}\sqrt{\left(\frac{sin(\theta_1+\theta_3)}{cos\,\theta_3}\right)^2+\left(\frac{sin(\theta_2+\theta_6)}{cos\,\theta_6}\right)^2+2\cdot\left(\frac{sin(\theta_1+\theta_3)}{cos\,\theta_3}\right)\left(\frac{sin(\theta_2+\theta_6)}{cos\,\theta_6}\right)cos\,(\theta_1+\theta_2)}}{2sin(\theta_1+\theta_2)}$$

得證。

引理四

如圖九，連接$\overline{O_1C_1}$~$\overline{O_1C_6}$，分別過切點C_1~C_6作切線可得圓外接六邊形$D_1D_2D_3D_4D_5D_6$，則旁心六邊形$C_1C_2C_3C_4C_5C_6$外接圓的圓心角$\alpha_1\sim\alpha_6$，分別會對應到圖上旁心六邊形對角線與邊長之夾角。



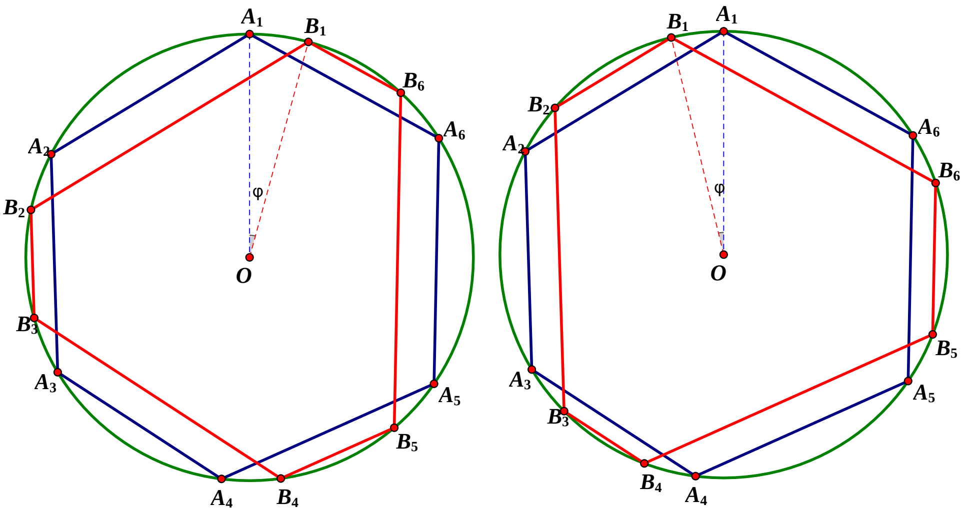
圖九

說明：如圖九可知，圓心角$\angle C_1O_1D_1=\angle D_1O_1C_6=\frac{\widehat{C_1C_6}}{2}$，對角線與邊長所夾的角$\angle C_1C_2C_6=\angle C_1C_5C_6=\frac{\widehat{C_1C_6}}{2}$，所以$\angle C_1O_1D_1=\angle D_1O_1C_6=\angle C_1C_2C_6=\angle C_1C_5C_6=\alpha_1$，其他角$\alpha_2\sim\alpha_6$皆是。

有了R_1之後，我們繼續作圓外切六邊形$D_1D_2D_3D_4D_5D_6$的旁心六邊形$E_1E_2E_3E_4E_5E_6$，此時若旁心六邊形$E_1E_2E_3E_4E_5E_6$有外接圓時，其半徑R_2又應該怎麼求呢？而且六邊形不像四邊形的圓心角一樣會兩個互換，如果繼續往外作外接圓到哪一層才會開始相似？如果要解決這個問題必須要有圓O_2的圓心角，且圓心角又必須和一開始的內切圓圓心角$\theta_1 \sim \theta_6$有關係，這問題困擾我們很久，後來我們發現如果研究r和R_2的夾角，可以幫助我們突破這一個困難點。

引理五

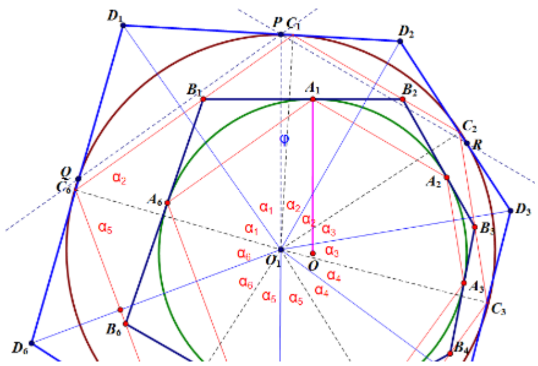
如圖十，圓內接六邊形$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，若以O為圓心將A_1向右旋轉φ角到B_1，作六邊形$B_1B_2B_3B_4B_5B_6$六邊分別與六邊形$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$六邊平行，則我們稱為右偏移，若將A_1向左旋轉φ角，則我們稱為左偏移。若右偏移，由平行線截等弧可知，則$\angle B_1OB_2 - \angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 - \angle B_2OB_3 = \angle B_3OB_4 - \angle A_3OA_4 = \angle A_4OA_5 - \angle B_4OB_5 = \angle B_5OB_6 - \angle A_5OA_6 = \angle A_1OA_6 - \angle B_1OB_6 = 2\varphi$，左偏移則交錯順序相反。



圖十

討論四

1.如右圖十一，過O_1作平行$\overline{OA_1}$之直線交$\overline{D_1D_2}$於P，過P點作平行$\overline{C_1C_6}$之直線$\overline{PQ}$，平行$\overline{C_1C_2}$之直線$\overline{PR}$，由引理五，則偏移角$\varphi = |\alpha_i - \theta_i|$，$i = 1 \sim 6$。



圖十一

2.又由定理四，$\frac{\overline{C_1C_6}}{2}=\frac{r}{2}\left(\frac{sin(\theta_2+\theta_6)}{cos\,\theta_1\,cos\,\theta_2\,cos\,\theta_6}\right)$

且$R_1=r\cdot\frac{\sqrt{\left(\frac{sin(\theta_1+\theta_3)}{cos\,\theta_3}\right)^2+\left(\frac{sin(\theta_2+\theta_6)}{cos\,\theta_6}\right)^2+2\cdot\frac{sin(\theta_1+\theta_3)\,sin(\theta_2+\theta_6)\,cos(\theta_1+\theta_2)}{cos\theta_3\,cos\,\theta_6}}}{2sin(\theta_1+\theta_2)\cdot cos\theta_1\,cos\,\theta_2}$

$$\therefore sin\,\alpha_1=\frac{\frac{\overline{C_1C_6}}{2}}{R_1}=\frac{\frac{r}{2}\left(\frac{sin(\theta_2+\theta_6)}{cos\,\theta_1\,cos\,\theta_2\,cos\,\theta_6}\right)}{r\cdot\frac{\sqrt{\left(\frac{sin(\theta_1+\theta_3)}{cos\,\theta_3}\right)^2+\left(\frac{sin(\theta_2+\theta_6)}{cos\,\theta_6}\right)^2+2\cdot\frac{sin(\theta_1+\theta_3)\,sin(\theta_2+\theta_6)\,cos(\theta_1+\theta_2)}{cos\theta_3\,cos\,\theta_6}}}{2sin(\theta_1+\theta_2)\cdot cos\theta_1\,cos\,\theta_2}}$$

$$=\frac{sin(\theta_1+\theta_2)\cdot sin(\theta_2+\theta_6)\Big/cos\,\theta_6}{\sqrt{\left(\frac{sin(\theta_1+\theta_3)}{cos\,\theta_3}\right)^2+\left(\frac{sin(\theta_2+\theta_6)}{cos\,\theta_6}\right)^2+2\cdot\frac{sin(\theta_1+\theta_3)\,sin(\theta_2+\theta_6)\,cos(\theta_1+\theta_2)}{cos\theta_3\,cos\,\theta_6}}}$$

$$\therefore\alpha_1=sin^{-1}\left(\frac{sin(\theta_1+\theta_2)\cdot sin(\theta_2+\theta_6)\Big/cos\,\theta_6}{\sqrt{\left(\frac{sin(\theta_1+\theta_3)}{cos\,\theta_3}\right)^2+\left(\frac{sin(\theta_2+\theta_6)}{cos\,\theta_6}\right)^2+2\cdot\frac{sin(\theta_1+\theta_3)\,sin(\theta_2+\theta_6)\,cos(\theta_1+\theta_2)}{cos\theta_3\,cos\,\theta_6}}}\right)$$

$$=sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{sin(\theta_1+\theta_3)\,cos\,\theta_6}{sin(\theta_1+\theta_2)\,sin(\theta_2+\theta_6)\,cos\,\theta_3}\right)^2+\left(\frac{1}{sin(\theta_1+\theta_2)\cdot}\right)^2+2\cdot\frac{sin(\theta_1+\theta_3)\,cos\,\theta_6}{sin(\theta_1+\theta_2)\cdot sin(\theta_2+\theta_6)\cdot tan(\theta_1+\theta_2)\cdot cos\theta_3}}}\right)。$$

(二)旁心六邊形$E_1E_2E_3E_4E_5E_6$外接圓圓O_2半徑R_2的求法

如圖八，由定理四可知，圓外切六邊形$B_1B_2B_3B_4B_5B_6$其內切圓圓O半徑為r，圓心角為$\theta_1\sim\theta_6$，其旁心六邊形$C_1C_2C_3C_4C_5C_6$外接圓圓O_1半徑為R_1，圓心角為$\alpha_1\sim\alpha_6$，若繼續作圓O_1之外接六邊形$D_1D_2D_3D_4D_5D_6$，再作其旁心六邊形$E_1E_2E_3E_4E_5E_6$，若旁心六邊形$E_1E_2E_3E_4E_5E_6$有外接圓圓O_2，則

$$\frac{R_2}{R_1}=\frac{\sqrt{\left(\frac{sin(\alpha_1+\alpha_3)}{cos\,\alpha_3}\right)^2+\left(\frac{sin(\alpha_2+\alpha_6)}{cos\,\alpha_6}\right)^2+2\cdot\frac{sin(\alpha_1+\alpha_3)\,sin(\alpha_2+\alpha_6)\,cos(\alpha_1+\alpha_2)}{cos\alpha_3\,cos\,\alpha_6}}}{2sin(\alpha_1+\alpha_2)\cdot cos\alpha_1\,cos\,\alpha_2}$$

其中

$$\alpha_1=sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{sin(\theta_1+\theta_3)\,cos\,\theta_6}{sin(\theta_1+\theta_2)\,sin(\theta_2+\theta_6)\,cos\,\theta_3}\right)^2+\left(\frac{1}{sin(\theta_1+\theta_2)}\right)^2+2\cdot\frac{sin(\theta_1+\theta_3)\,cos\,\theta_6}{sin(\theta_1+\theta_2)\cdot sin(\theta_2+\theta_6)\cdot tan(\theta_1+\theta_2)\cdot cos\theta_3}}}\right)$$

$$\alpha_2=sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{sin(\theta_2+\theta_6)\,cos\,\theta_3}{sin(\theta_1+\theta_2)\,sin(\theta_1+\theta_3)\,cos\,\theta_6}\right)^2+\left(\frac{1}{sin(\theta_1+\theta_2)}\right)^2+2\cdot\frac{sin(\theta_2+\theta_6)\,cos\,\theta_3}{sin(\theta_1+\theta_2)\cdot sin(\theta_1+\theta_3)\cdot tan(\theta_1+\theta_2)\cdot cos\theta_6}}}\right)$$

$$\alpha_3 = sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{sin(\theta_3+\theta_5)\cos\theta_2}{sin(\theta_3+\theta_4)\,sin(\theta_4+\theta_2)\cos\theta_5}\right)^2+\left(\frac{1}{sin(\theta_3+\theta_4)}\right)^2+2\cdot\frac{sin(\theta_3+\theta_5)\cos\theta_2}{sin(\theta_3+\theta_4)\cdot sin(\theta_4+\theta_2)\cdot tan(\theta_3+\theta_4)\cdot cos\theta_5}}}\right)$$

$$\alpha_4 = sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{sin(\theta_4+\theta_2)\cos\theta_5}{sin(\theta_3+\theta_4)\,sin(\theta_3+\theta_5)\cos\theta_2}\right)^2+\left(\frac{1}{sin(\theta_3+\theta_4)}\right)^2+2\cdot\frac{sin(\theta_4+\theta_2)\cos\theta_5}{sin(\theta_3+\theta_4)\cdot sin(\theta_3+\theta_5)\cdot tan(\theta_3+\theta_4)\cdot cos\theta_2}}}\right)$$

$$\alpha_5 = sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{sin(\theta_5+\theta_1)\cos\theta_4}{sin(\theta_5+\theta_6)\,sin(\theta_6+\theta_4)\cos\theta_1}\right)^2+\left(\frac{1}{sin(\theta_5+\theta_6)}\right)^2+2\cdot\frac{sin(\theta_5+\theta_1)\cos\theta_4}{sin(\theta_5+\theta_6)\cdot sin(\theta_6+\theta_4)\cdot tan(\theta_5+\theta_6)\cdot cos\theta_1}}}\right)$$

$$\alpha_6 = sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{sin(\theta_6+\theta_4)\cos\theta_1}{sin(\theta_5+\theta_6)\,sin(\theta_5+\theta_1)\cos\theta_4}\right)^2+\left(\frac{1}{sin(\theta_5+\theta_6)}\right)^2+2\cdot\frac{sin(\theta_6+\theta_4)\cos\theta_1}{sin(\theta_5+\theta_6)\cdot sin(\theta_5+\theta_1)\cdot tan(\theta_5+\theta_6)\cdot cos\theta_4}}}\right)$$

(三)如圖十二，圓外切六邊形$B_1B_2B_3B_4B_5B_6$其內切圓圓O半徑為r，圓心角為$\theta_1\sim\theta_6$，其旁心六邊形$C_1C_2C_3C_4C_5C_6$外接圓圓O₁半徑為R₁，圓心角$\angle C_1O_1D_1=\alpha_{1\sim}\alpha_6$，旁心六邊形$F_1F_2F_3F_4F_5F_6$外接圓圓O₂半徑為R₂，圓心角$\angle E_1O_2F_1=\beta_1$，若

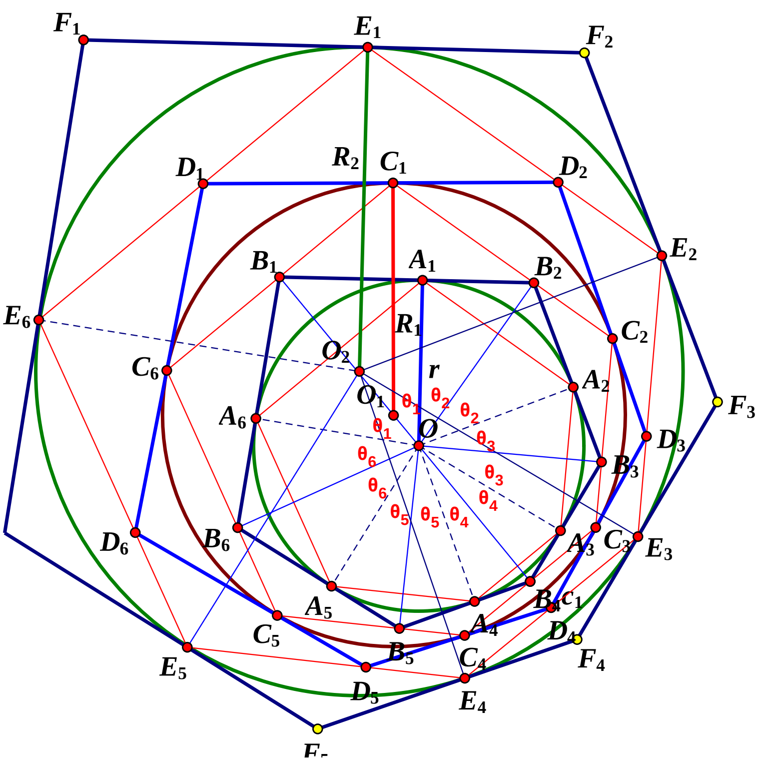
$$\alpha_1 = sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{sin(\theta_1+\theta_3)\cos\theta_6}{sin(\theta_1+\theta_2)\,sin(\theta_2+\theta_6)\cos\theta_3}\right)^2+\left(\frac{1}{sin(\theta_1+\theta_2)}\right)^2+2\cdot\frac{sin(\theta_1+\theta_3)\cos\theta_6}{sin(\theta_1+\theta_2)\cdot sin(\theta_2+\theta_6)\cdot tan(\theta_1+\theta_2)\cdot cos\theta_3}}}\right)$$

則由引理五，若偏移φ角，則可得

$$\beta_1 = sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{sin(\alpha_1+\alpha_3)\cos\alpha_6}{sin(\alpha_1+\alpha_2)\,sin(\alpha_2+\alpha_6)\cos\alpha_3}\right)^2+\left(\frac{1}{sin(\alpha_1+\alpha_2)}\right)^2+2\cdot\frac{sin(\alpha_1+\alpha_3)\cos\alpha_6}{sin(\alpha_1+\alpha_2)\cdot sin(\alpha_2+\alpha_6)\cdot tan(\alpha_1+\alpha_2)\cdot cos\alpha_3}}}\right)$$

$$= sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{sin(\theta_1+\theta_3+2\varphi)\,cos(\theta_6-\varphi)}{sin(\theta_1+\theta_2)\,sin(\theta_2+\theta_6-2\varphi)\,cos(\theta_3+\varphi)}\right)^2+\left(\frac{1}{sin(\theta_1+\theta_2)}\right)^2+2\cdot\frac{sin(\theta_1+\theta_3+2\varphi)\,cos(\theta_6-\varphi)}{sin(\theta_1+\theta_2)\cdot sin(\theta_2+\theta_6-2\varphi)\cdot tan(\theta_1+\theta_2)\cdot cos(\theta_3+\varphi)}}}\right)$$

而此時β_1是否和四邊形相同會回到內切圓的圓心角θ_1呢？我們用GSP作了以下實驗：



圖十二

1. 取$\theta_1 = 36.93139$，$\theta_2 = 37.94233$，$\theta_3 = 22.51387$，$\theta_4 = 24.16655$，$\theta_5 = 21.49976$，$\theta_6 = 36.94611$

則$\alpha_1 = 43.07119 \therefore \varphi = \alpha_1 - \theta_1 = 6.13980$　代入

$$\beta_1 = sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{sin(\theta_1+\theta_3+2\varphi)\,cos(\theta_6-\varphi)}{sin(\theta_1+\theta_2)\,sin(\theta_2+\theta_6-2\varphi)\,cos(\theta_3+\varphi)}\right)^2+\left(\frac{1}{sin(\theta_1+\theta_2)}\right)^2+2\cdot\frac{sin(\theta_1+\theta_3+2\varphi)\,cos(\theta_6-\varphi)}{sin(\theta_1+\theta_2)\cdot sin(\theta_2+\theta_6-2\varphi)\cdot tan(\theta_1+\theta_2)\cdot cos(\theta_3+\varphi)}}}\right)$$

後得$\beta_1 = 36.43489 \neq \theta_1$，得證不相似。

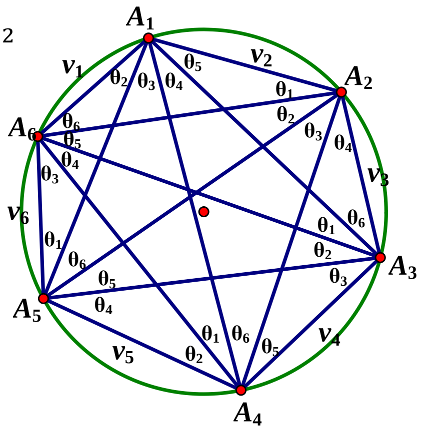
2. $\varphi_1 = |\beta_1 - \alpha_1| = 6.63631$，則$\gamma_1 = 43.60547 \therefore \varphi_2 = \gamma_1 - \beta_1 = 7.17059$，偏移角的值會越來越大，且會左右偏移擺盪。

(四)圓內接六角星形之討論

$\boxed{\text{引理六}}$設$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$為平面上的六邊形，若滿足下列等式則它是圓內接六邊形。

$$\frac{sin(A_1+A_5)}{\overline{A_2A_4}} = \frac{sin(A_2+A_6)}{\overline{A_3A_5}} = \frac{sin(A_3+A_1)}{\overline{A_4A_6}} = \frac{sin(A_4+A_2)}{\overline{A_5A_1}} = \frac{sin(A_5+A_3)}{\overline{A_6A_2}} = \frac{sin(A_6+A_4)}{\overline{A_1A_3}}$$

〔證明〕



首先連接$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$之對角線，設$\angle A_6A_5A_1 = \theta_1$、$\angle A_5A_4A_6 = \theta_2$、$\angle A_4A_3A_5 = \theta_3$、$\angle A_3A_2A_4 = \theta_4$、$\angle A_2A_1A_3 = \theta_5$、$\angle A_1A_6A_2 = \theta_6$

則$A_1 = \theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5$、$A_2 = \theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4$ ...以此類推

由於$\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5+\theta_6 = \pi$

$$A_1 + A_5 = \theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5+\theta_4+\theta_1+\theta_6+\theta_5 = \pi+\theta_4+\theta_5$$

同理

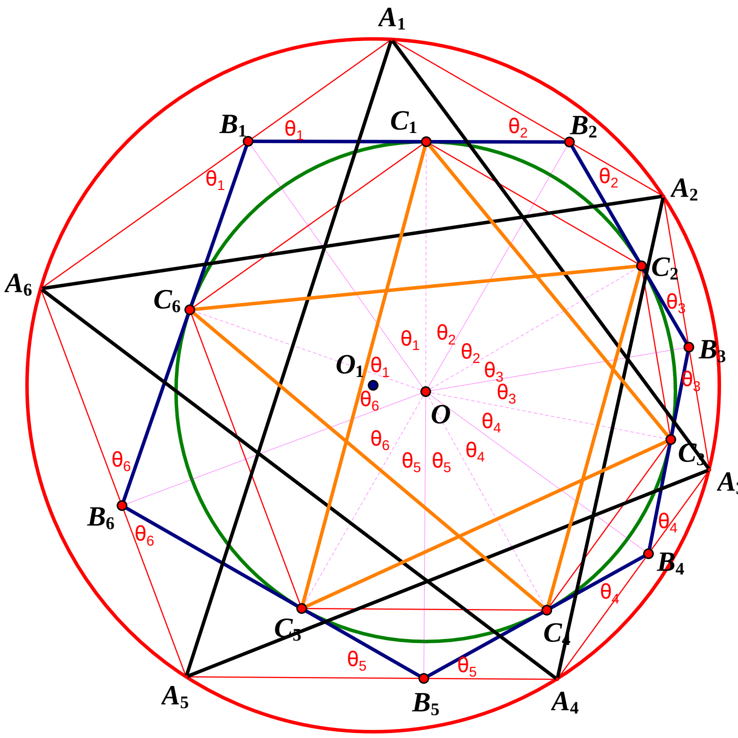
$A_2 + A_6 = \pi+\theta_3+\theta_4$、$A_3 + A_1 = \pi+\theta_2+\theta_3$、$A_4 + A_2 = \pi+\theta_1+\theta_2$、$A_5 + A_3 = \pi+\theta_6+\theta_1$、$A_6 + A_4 = \pi+\theta_5+\theta_6$、$A_1 + A_5 = \pi+\theta_4+\theta_5 \ldots(1)$

接著根據正弦定理可知

$$\frac{sin\,\theta_1}{V_1} = \frac{sin\,\theta_2}{V_6} = \frac{sin\,\theta_3}{V_5} = \frac{sin\,\theta_4}{V_4} = \frac{sin\,\theta_5}{V_3} = \frac{sin\,\theta_5}{V_2} = \frac{1}{2R}$$

$$\frac{sin(\theta_4+\theta_5)}{\overline{A_2A_4}} = \frac{sin(\theta_3+\theta_4)}{\overline{A_3A_5}} = \frac{sin(\theta_2+\theta_3)}{\overline{A_4A_6}} = \frac{sin(\theta_1+\theta_2)}{\overline{A_5A_1}} = \frac{sin(\theta_6+\theta_1)}{\overline{A_6A_2}}$$
$$= \frac{sin(\theta_5+\theta_6)}{\overline{A_1A_3}} \ldots(2)$$

(1)帶入(2)得$\frac{sin(A_1+A_5)}{\overline{A_2A_4}} = \frac{sin(A_2+A_6)}{\overline{A_3A_5}} = \frac{sin(A_3+A_1)}{\overline{A_4A_6}} = \frac{sin(A_4+A_2)}{\overline{A_5A_1}} = \frac{sin(A_5+A_3)}{\overline{A_6A_2}} = \frac{sin(A_6+A_4)}{\overline{A_1A_3}}$。



圖十三

1. 如圖十三由引理六，

$$\frac{\sin(C_1+C_5)}{\overline{C_2C_4}}=\frac{\sin(C_2+C_6)}{\overline{C_3C_5}}=\frac{\sin(C_3+C_1)}{\overline{C_4C_6}}=\frac{\sin(C_4+C_2)}{\overline{C_5C_1}}=\frac{\sin(C_5+C_3)}{\overline{C_6C_2}}=\frac{\sin(C_6+C_4)}{\overline{C_1C_3}}$$

$\because C_1=\pi-(\theta_1+\theta_2)$，$C_2=\pi-(\theta_2+\theta_3)$，……，$C_6=\pi-(\theta_1+\theta_6)$

$$\Rightarrow \frac{\sin(C_1+C_5)}{\overline{C_2C_4}}=\frac{\sin(2\pi-(\theta_1+\theta_2+\theta_5+\theta_6))}{\overline{C_2C_4}}=\frac{\sin(\pi+\theta_3+\theta_4)}{\overline{C_2C_4}}=\frac{-\sin(c_3)}{\overline{C_2C_4}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(C_1)}{\overline{C_2C_6}}=\frac{\sin(C_2)}{\overline{C_3C_1}}=\frac{\sin(C_3)}{\overline{C_4C_2}}=\frac{\sin(C_4)}{\overline{C_5C_3}}=\frac{\sin(C_5)}{\overline{C_6C_4}}=\frac{\sin(C_6)}{\overline{C_1C_5}}=\frac{1}{2r}$$

(正弦定理)

同理，若旁心六邊形$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$有外接圓，則

$$\frac{\sin(A_1)}{\overline{A_2A_6}}=\frac{\sin(A_2)}{\overline{A_3A_1}}=\frac{\sin(A_3)}{\overline{A_4A_2}}=\frac{\sin(A_4)}{\overline{A_5A_3}}=\frac{\sin(A_5)}{\overline{A_6A_4}}=\frac{\sin(A_6)}{\overline{A_1A_5}}=\frac{1}{2R_1}$$

又因旁心六邊形$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$與旁心六邊形$C_1C_2C_3C_4C_5C_6$六邊分別互相平形

$\Rightarrow \sin(C_i)=\sin(A_i)$，$i=1\sim6$ ，

$$\Rightarrow \frac{A_2A_6}{C_2C_6}=\frac{A_3A_1}{C_3C_1}=\frac{A_4A_2}{C_4C_2}=\frac{A_5A_3}{C_5C_3}=\frac{A_6A_4}{C_6C_4}=\frac{A_1A_5}{C_1C_5}$$

⇒如果不斷向外作外接圓，由每一層旁心六邊形頂角所連接而成的六角星形邊長都成比例，但角度不一定相等，故皆不相似。

陸、討論

一、圓外切偶數2n邊形

(一)由六邊形的研究，首先我們可以得知如果是2n邊形，則

$$\frac{R_1}{r}=\frac{\sqrt{\left(\frac{sin(\theta_1+\theta_3)}{cos\,\theta_3}\right)^2+\left(\frac{sin(\theta_2+\theta_{2n})}{cos\,\theta_{2n}}\right)^2+2\cdot\frac{sin(\theta_1+\theta_3)\,sin(\theta_2+\theta_{2n})\,cos(\theta_1+\theta_2)}{cos\theta_3\,cos\,\theta_{2n}}}}{2sin(\theta_1+\theta_2)\cdot cos\theta_1\,cos\,\theta_2}$$

(二)偏移角$\varphi=|\alpha_i-\theta_i|$，$i=1\sim 2n$。其中

$$\alpha_i=sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{sin\,\gamma_i\,cos\,\theta_{i+(-1)^i}}{sin\,\beta_i\,sin\,\delta_i\,cos\,\theta_{i-2\cdot(-1)^i}}\right)^2+\left(\frac{1}{sin\,\beta_i}\right)^2+2\cdot\frac{sin\,\gamma_i\,cos\,\theta_{i+(-1)^i}}{sin\,\beta_i\,sin\,\delta_i\,tan\,\beta_i\,cos\,\theta_{i-2\cdot(-1)^i}}}}\right)$$

但需定義$\theta_{2n+x}=\theta_x\,,\theta_0=\theta_{2n}\,,\theta_{-x}=\theta_{2n-x}\,,\beta_i=\theta_i+\theta_{i-1}i\,,\gamma_i=\theta_i+\theta_{i-2\cdot(-1)^i}$，

$$\delta_i=\theta_{i+1}+\theta_{i-1}$$

(三)圓外切2n邊形$B_1B_2\ldots B_{2n}$其內切圓圓O半徑為r，圓心角為$\theta_1\sim\theta_{2n}$，其旁心2n邊形$C_1C_2\ldots C_{2n}$外接圓圓O_1半徑為R_1，圓心角為$\alpha_1\sim\alpha_{2n}$，若繼續作圓O_1之外接2n邊形$D_1D_2\ldots D_{2n}$，再作其旁心六邊形$E_1E_2\ldots E_{2n}$，若旁心六邊形$E_1E_2\ldots E_{2n}$有外接圓圓O_2，則

$$\frac{R_2}{R_1}=\frac{\sqrt{\left(\frac{sin(\alpha_1+\alpha_3)}{cos\,\alpha_3}\right)^2+\left(\frac{sin(\alpha_2+\alpha_{2n})}{cos\,\alpha_{2n}}\right)^2+2\cdot\frac{sin(\alpha_1+\alpha_3)\,sin(\alpha_2+\alpha_{2n})\,cos(\alpha_1+\alpha_2)}{cos\alpha_3\,cos\,\alpha_{2n}}}}{2sin(\alpha_1+\alpha_2)\cdot cos\alpha_1\,cos\,\alpha_2}$$。

二、圓外切奇數2n+1邊形

(一)圓外切N邊形$B_1B_2B_3\ldots.B_N$(N為奇數)，其旁心N邊形為$A_1A_2A_3\ldots.A_N$，連接內切圓切點所得多邊形為$C_1C_2C_3\ldots.C_N$，若旁心多邊形為圓內接多邊形，則旁心多邊形和內切圓切點多邊形必相似。

【證明】

1.由參考文獻[]可知，若$N=4n+1$邊形, 則它是圓內接多邊形的充要條件為邊角關係必須滿足下列方程式:

$$\frac{sin(A_1+A_3+A_5+\cdots A_{4n-2}+A_{4n})}{\overline{A_{2n+1}A_{2n+2}}}=\frac{sin(A_2+A_4+A_6+\cdots A_{4n}+A_{4n+1})}{\overline{A_{2n+2}A_{2n+3}}}=\cdots\ldots=\frac{sin(A_{4n+1}+A_2+A_4+\cdots A_{4n-3}+A_{4n-1})}{\overline{A_{2n}A_{2n+1}}}$$ 。

首先我們先證明邊長會成比例，如圖十四，

$\because A_1=\pi-\theta_1-\theta_{4n+1}$，$A_3=\pi-\theta_2-\theta_3$，……，$A_{4n}=\pi-\theta_{4n}-\theta_{4n-1}$，

$$\Rightarrow\frac{sin(A_1+A_3+A_5+\cdots A_{4n-2}+A_{4n})}{\overline{A_{2n+1}A_{2n+2}}}$$
$$=\frac{sin(\pi-\theta_1-\theta_{4n+1}+\pi-\theta_2-\theta_3+\cdots+\pi-\theta_{4n}-\theta_{4n-1})}{\overline{A_{2n+1}A_{2n+2}}}$$
$$=\frac{sin[(2n+1)\pi-(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots\ldots+\theta_{4n}+\theta_{4n+1})-\theta_{2n+1}]}{\overline{A_{2n+1}A_{2n+2}}}$$
$$=\frac{sin(2n\pi-\theta_{2n+1})}{\overline{A_{2n+1}A_{2n+2}}}=\frac{-sin(\theta_{2n+1})}{\overline{A_{2n+1}A_{2n+2}}}$$

$\Rightarrow$ 方程式可化成$\frac{sin(\theta_{2n+1})}{\overline{A_{2n+1}A_{2n+2}}}=\frac{sin(\theta_{2n+2})}{\overline{A_{2n+2}A_{2n+3}}}=\cdots\ldots=\frac{sin(\theta_{2n})}{\overline{A_{2n}A_{2n+1}}}$，若內切圓半徑為 r，

同乘 2r 可得

$$\frac{2rsin(\theta_{2n+1})}{\overline{A_{2n+1}A_{2n+2}}}=\frac{2r\,sin(\theta_{2n+2})}{\overline{A_{2n+2}A_{2n+3}}}=\cdots\ldots=\frac{2r\,sin(\theta_{2n})}{\overline{A_{2n}A_{2n+1}}}$$，

$$\therefore\frac{\overline{C_1C_2}}{\overline{A_1A_2}}=\frac{\overline{C_2C_3}}{\overline{A_2A_3}}=\cdots\ldots=\frac{\overline{C_{4n+1}C_1}}{\overline{A_{4n+1}A_1}}$$ 。

同理可證，若$A_1A_2A_3\ldots.A_{2n+1}$為平面上的 4n+3 邊形, 則滿足方程式:

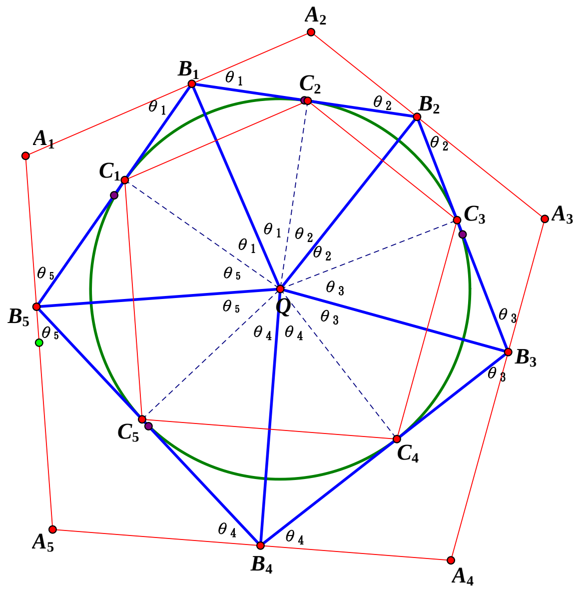
$$\frac{sin(A_1+A_3+A_5+\cdots A_{4n}+A_{4n+2})}{A_{2n+2}A_{2n+3}}=\frac{sin(A_2+A_4+A_6+\cdots A_{4n+1}+A_{4n+3})}{A_{2n+3}A_{2n+4}}=\cdots\ldots$$
$$=\frac{sin(A_{4n+3}+A_2+A_4+\cdots A_{4n-1}+A_{4n+1})}{A_{2n+1}A_{2n+2}}$$

最後也能得到相同的結果。

2.接下來我們說明角度會相等。如圖，$\because C_1C_2\parallel A_1A_2$，$C_2C_3\parallel A_2A_3$，……，$C_NC_1\parallel A_NA_1$，

$\therefore\angle A_1=\angle C_1$，$\angle A_2=\angle C_2$，……，$\angle A_N=\angle C_N$。

由(1)和(2)可得，多邊形$A_1A_2A_3 \ldots. A_N$~多邊形為$C_1C_2C_3 \ldots. C_N$。



圖十四

(二)圓外切 N 邊形$B_1B_2B_3 \ldots. B_N$(N 為奇數)的旁心多邊形$A_1A_2A_3 \ldots. A_N$若為圓內接多邊形，則$B_1B_2B_3 \ldots. B_N$必為雙心多邊形。

【證明】

1.

如圖十五，O_1、O_2分別為旁心多邊形$A_1A_2BA_3 \ldots. A_N$與內切圓切點多邊形$C_1C_2C_3 \ldots. C_N$之外心，

取$\overline{B_1B_2}$及$\overline{B_2B_3}$ 中點 F、E，分別作中垂線$\overrightarrow{EI}$與$\overrightarrow{FI}$，若兩直線相交於 I 點，證明I點必為$\overline{O_1O_2}$之中點。

$\because \overline{FI}$、$\overline{C_1O_1}$皆垂直$\overline{B_1B_2}$ $\therefore$ $\overline{FI} \parallel \overline{C_1O_1}$ ・・・①

連接$\overline{A_1O_2}$ $\because$ $\overline{C_1C_n} \parallel \overline{A_1A_n} \Rightarrow \angle O_2KC_n = \angle O_2A_1A_n$，又由引理四多邊行$\mathrm{A_1A_2A_3 \ldots. A_N}$~多邊行$\mathrm{C_1C_2C_3 \ldots. C_N}$

$\therefore \angle O_2A_1A_n = \angle O_1C_1C_n \Rightarrow \overline{A_1O_2} \parallel \overline{C_1O_1}$ ・・・②

由①②$\overline{FI} \parallel \overline{C_1O_1} \parallel \overline{A_1O_2}$

同理可證$\overline{A_2O_2} \parallel \overline{EI} \parallel \overline{C_2O_1}$ ・・・(i)

在$\Delta B_1A_1B_2$中，由引理一 $\overline{A_1G} = r_1 = r tan\theta_5 tan\theta_1$

$\Rightarrow \overline{B_1G} = \frac{\overline{A_1G}}{tan\theta_5} = r tan\theta_1 = \overline{C_1B_2}$，又因為 F 為$\overline{B_1B_2}$中點，$\therefore \overline{GF} = \overline{FC_1}$，同理可證$\overline{DE} = \overline{EC_2}$ ・・・(ii)

由(i)(ii)，得I為$\overline{O_1O_2}$之中點。

2. 過 I 作$\overline{B_3B_4}$的垂線交$\overline{B_3B_4}$於 H 點，接下來證明 H 為$\overline{B_3B_4}$中點

$\because \overline{O_1C_3} \perp \overline{B_3B_4} \therefore \overline{IH} \parallel \overline{O_1C_3}$

連接$\overline{O_2A_3}$且交$\overline{B_3B_4}$於 J 點，由引理四得$\overline{O_2J} \parallel \overline{O_1C_3} \Rightarrow \overline{IH} \parallel \overline{O_1C_3} \parallel \overline{O_2J}$・・・③

由 1.結論與③可知H為$\overline{C_3J}$之中點・・・(iii)

在$\Delta B_3A_3B_4$中，由引理一 $\overline{A_3J} = r_3 = rtan\theta_2 tan\theta_3$

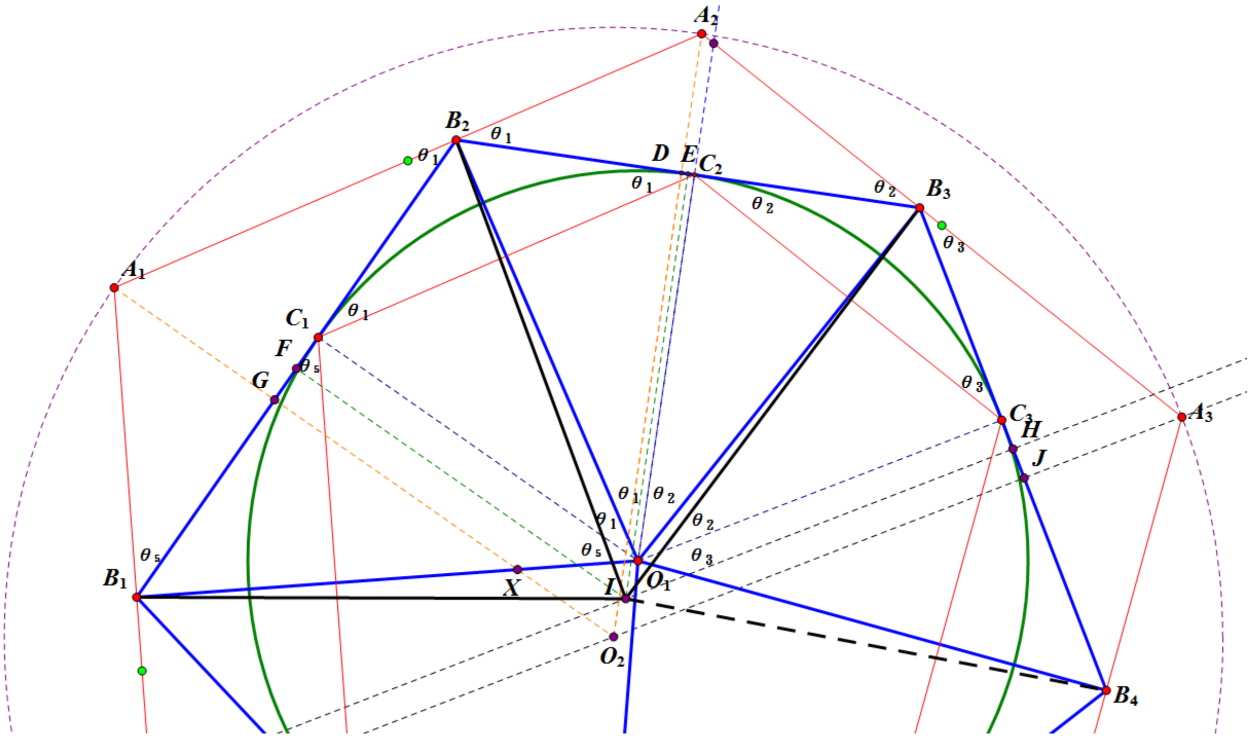
$\Rightarrow \overline{B_4J} = \frac{\overline{A_3J}}{tan\theta_3} = rtan\theta_2 = \overline{C_3B_3}$・・・(iv)

由(iii)(iv)，得H為$\overline{B_3B_4}$中點

$\therefore$ $\overline{\text{IH}}$為$\overline{B_3B_4}$之中垂線，可得$\overline{IB_3}$=$\overline{IB_4}$，同理可推得

$\overline{IB_1}$=$\overline{IB_2} = \overline{IB_3} = \cdots \ldots = \overline{IB_n}$

故I為多邊形$B_1B_2B_3 \ldots . B_N$之外心，得證。



圖十五

柒、結論

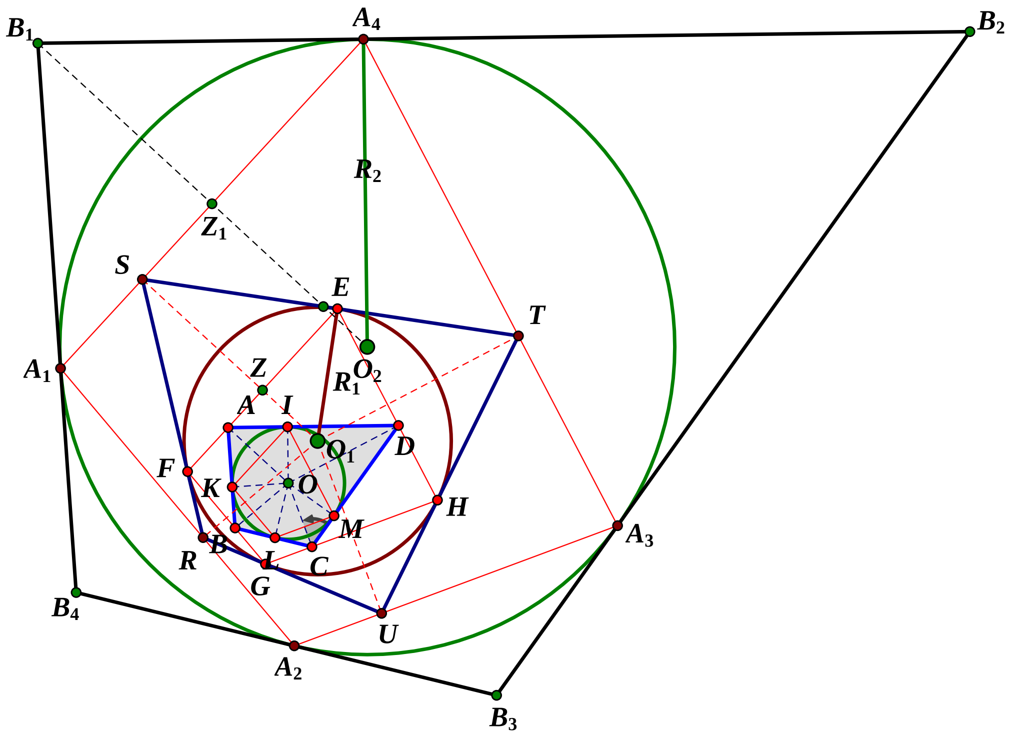
一、對圓外切四邊形不斷重複向外作旁心四邊形、外接圓、外切四邊形後，外切四邊形奇數層間互為相似形，偶數層間也互為相似形，旁心四邊形也是如此，且外層與內層間的面積比值皆為$\{\frac{\left[2\,sin\left(\frac{A+C}{2}\right)\right]^2}{sin\,A\,sin\,B\,sin\,C\,sin\,D}\}^2$。

二、如下圖，圓外切四邊形ABCD中，內切圓圓O的圓心角為$\theta_1 \sim \theta_4$，旁心四邊形EFGH外接圓圓O₁的圓心角為$\alpha_1 \sim \alpha_4$，旁心四邊形A₁A₂A₃A₄外接圓圓O₂的圓心角為$\beta_1 \sim \beta_4$，......，則

$$\alpha_1 = sin^{-1}\left(\frac{\frac{r\,sin(\theta_2+\theta_4)}{2cos\,\theta_1\,cos\,\theta_2\,cos\,\theta_4}}{\frac{r\,\,sin(\theta_2+\theta_4)}{2\,cos\,\theta_1\,cos\,\theta_2\,cos\,\theta_3\,cos\,\theta_4}}\right) = sin^{-1}(cos\,\theta_3) = sin^{-1}\left(sin(\frac{\pi}{2}-\theta_3)\right) = \frac{\pi}{2}-\theta_3$$，同理

$\alpha_2 = \frac{\pi}{2}-\theta_4$，$\alpha_3 = \frac{\pi}{2}-\theta_1$，$\alpha_4 = \frac{\pi}{2}-\theta_2$；

而$\beta_1 = sin^{-1}(cos\,\alpha_3) = sin^{-1}\left(sin(\frac{\pi}{2}-\alpha_3)\right) = \frac{\pi}{2}-\alpha_3 = \frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right) = \theta_1$，同理$\beta_2 = \theta_2$，$\beta_3 = \theta_3$，$\beta_4 = \theta_4$，因圓心角相等，之後圖形開始往外遞迴相似。



三、圓外切偶數2n邊形其旁心多邊形和內切圓切點多邊形不相似，往外層發現因偏移角φ會正負擺盪且絕對值越來越大，所以除了四邊形之外，其他偶數邊形不會回到相似，而圓外切奇數邊形則必為雙心多邊形，即旁心多邊形和內切圓切點多邊形相似。

四、圓外切偶數邊形的每一層旁心多邊形因邊長互相平形，所以頂角相等但邊長不成比例，而頂角所連接而成的多角星形則邊長都成比例，但角度不一定相等，故不相似。

五、若圓外切多邊形的旁心n邊形和內切圓切點n邊形相似，則圓外切多邊形必為雙心多邊形。

捌、參考資料及其他

一、李孟龍、莊耀鈞，三角形和圓內接四邊形的一個性質，中華民國第55屆中小學科學展覽會作品說明書高級中等學校組數學科。

二、李孟龍、莊耀鈞，層層疊疊-雙心多邊形面積的一個有趣性質，中華民國第56屆中小學科學展覽會作品說明書高級中等學校組數學科第二名。

三、李輝濱，【平面凸五邊形的最大面積與圓內接(2n + 1)邊形的正弦公式】，數學傳播期刊36卷4期，p.48-61

四、李坤能（民101）。國民中學數學第五冊（三版）。台南市：翰林。