

花蓮縣第 64 屆國民中小學科學展覽會

作品說明書

科別：數學科

組別：國中組

作品名稱：正方形內三角形的特殊規律

關鍵詞：正方形、三角形、比例

編號：

目錄

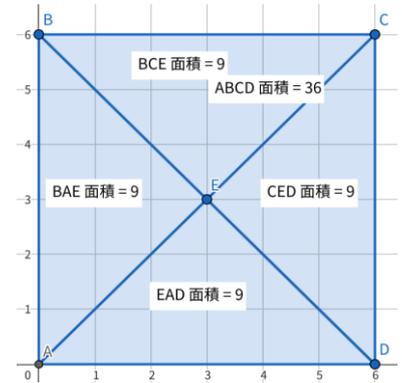
摘要.....	3
壹、研究動機.....	3
貳、研究目的.....	3
參、研究設備.....	4
肆、研究過程.....	4
伍、研究結果.....	5
陸、討論.....	9
柒、結論.....	9
捌、參考文獻資料.....	10

摘要

本研究要探討如果隨機在正方形內或外點一點，連至正方形四個頂點，所得出三角形之面積的特殊規律。

首先，我們先繪製出一個正方形，並在內點一點分出各個三角形，而其中必定有比例重複的三角形。

接著，我們經計算出各個三角形的面積以及比例。並把其中擁有相同比例的三角形的正方形其中為何會造成此現象的原因記錄下來。

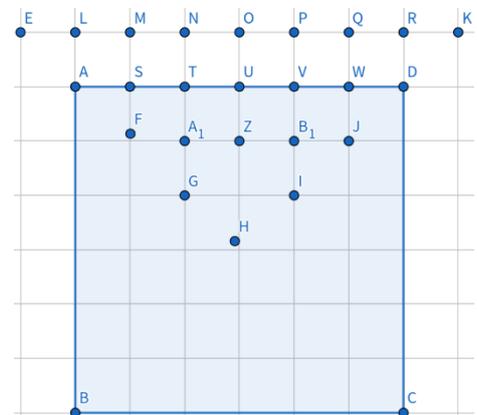


壹、研究動機

日常生活中，數學貫穿方方面面，我們將探索其在生活中的特殊規律。特別是圖形，它是我們幼時最早接觸的數學形式。我們希望從圖形出發，以此加深我們對數學的理解。為了滿足心中的好奇與迷惑，我們決定深入探索數學背後的原理與推理，使我們與數學之間的聯繫更加緊密。這個過程不僅讓我們對數學原本不熟悉的部分有了更深入的了解，同時也拓展了我們對世界的認識和思考。在探索的旅程中，我們發現了更多的奧妙，這不僅為我們的學習之路增添了樂趣，也讓我們更加期待未來的發現。

貳、研究目的

已知正方形是四邊相等且有四個直角的四邊形，所以繪製出的三角形會有特殊的比例，因正方形是高度對稱的圖形，所以我們在繪製的過程中，點的繪製只參考了正方形的上半部（如右圖）。

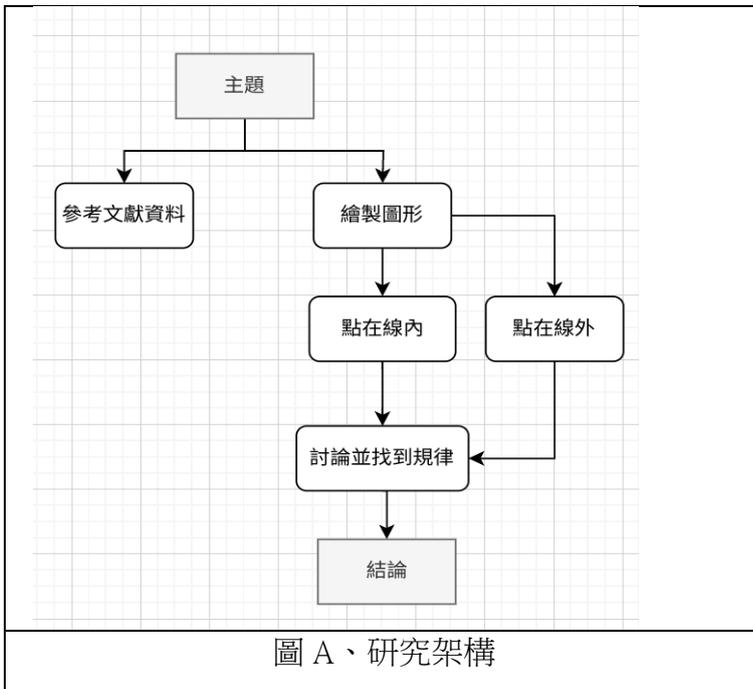


參、研究設備

一、紙、筆、Chromebook、GeoGebra、fotor、draw.io

肆、研究過程

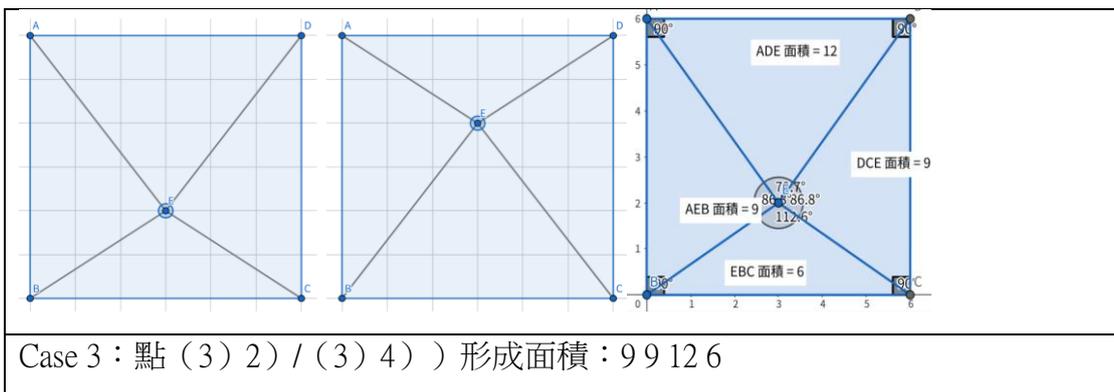
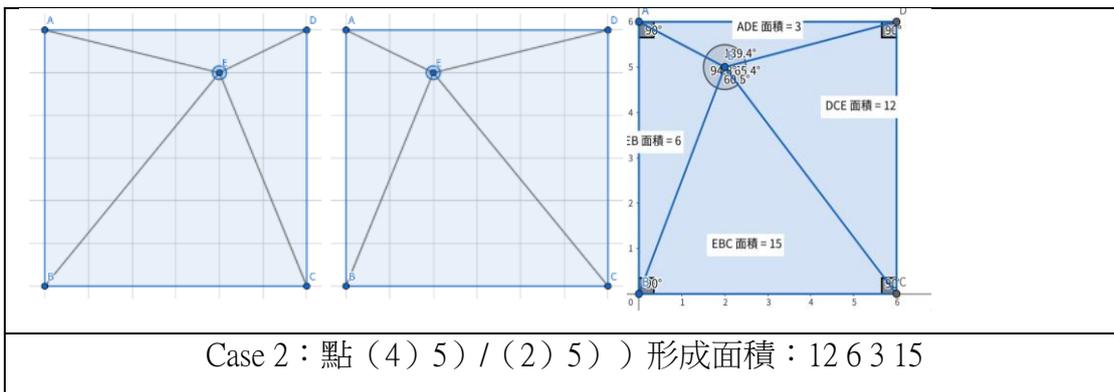
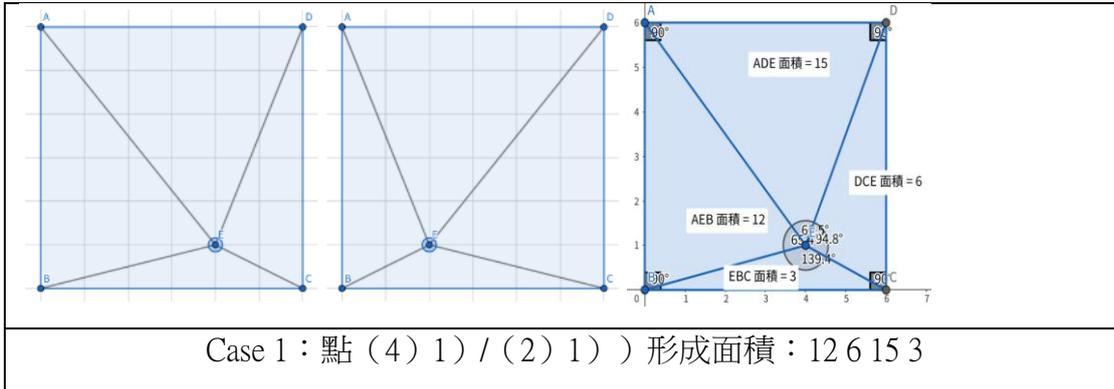
- 一、研究架構，如圖 A
- 二、繪製一個 6×6 的正方形。
- 三、在圖形內點一點，並以此點為起點到各頂點繪製線段。
- 四、使用線上程式裡內建的面積計算器裡計算其三角形之面積。
- 五、觀察所形成三角形並分析其特別關係。
- 六、對所觀察出來的結果進行討論。

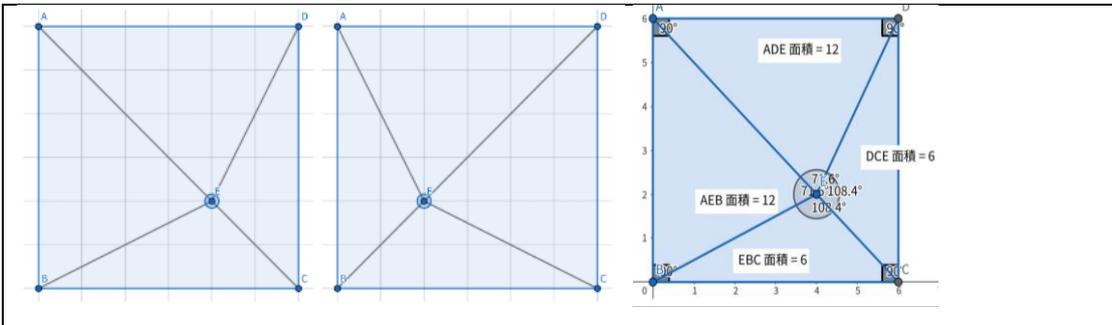


伍、研究結果

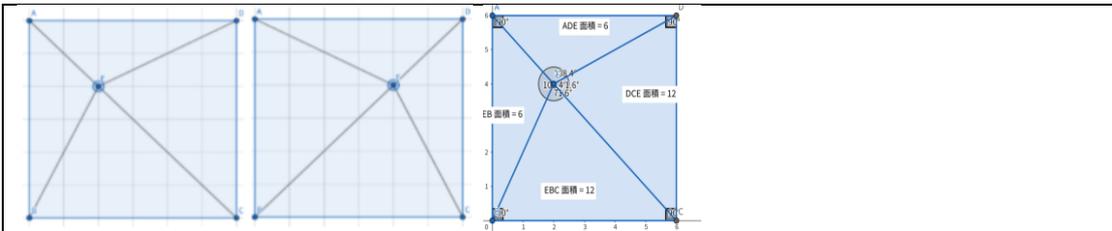
一、點在圖內

(面積表示以左→右→上→下)

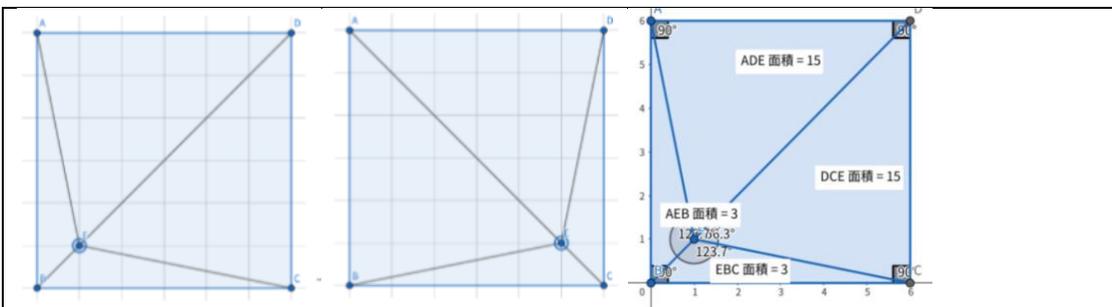




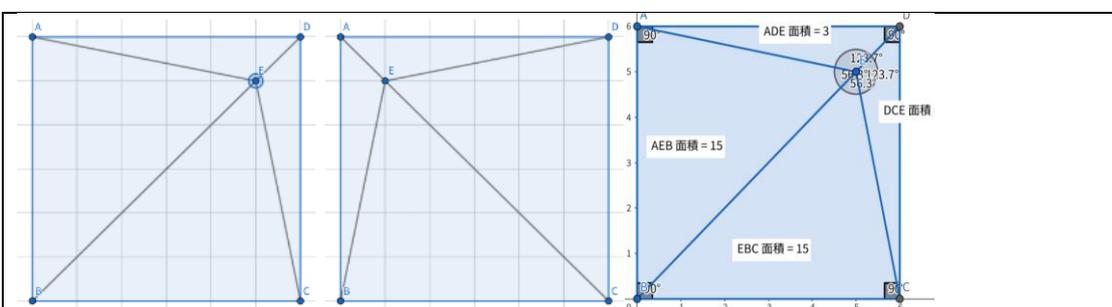
Case 4 : 點 (4) 2) / (2) 2)) 形成面積 : 12 6 12 6



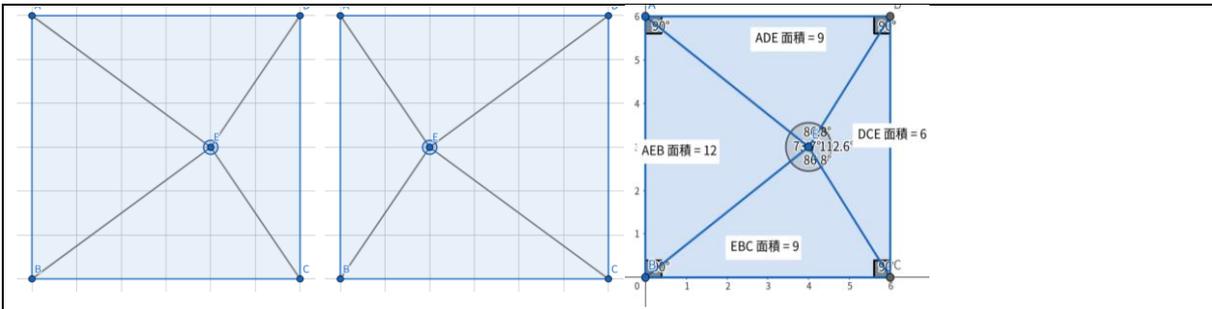
Case 5 : 點 (2) 4) / (4) 4)) 形成面積 : 6 12 6 6



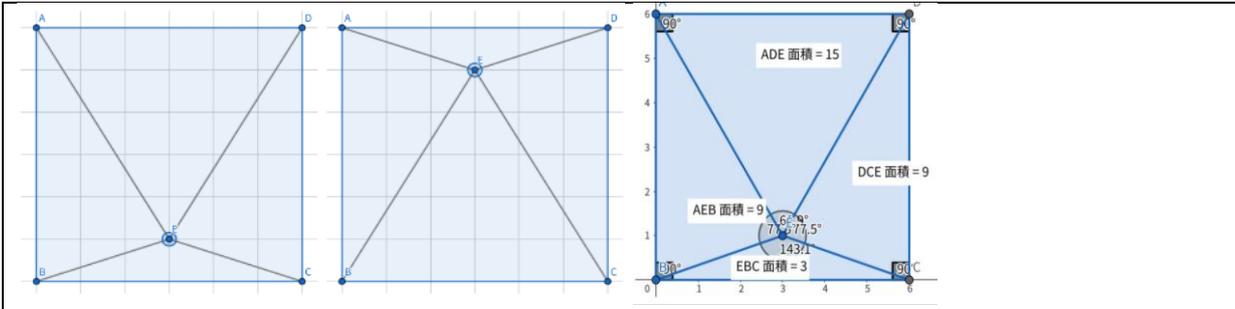
Case 6 : 點 (5) 1) / (1) 1)) 形成面積 : 15 3 15 3



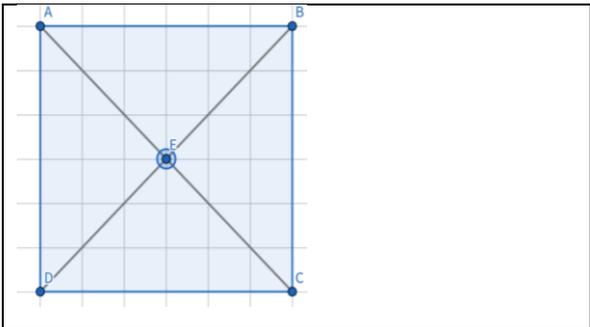
Case 7 : 點 (5) 5) / (1) 5)) 形成面積 : 15 3 3 15



Case 8 : 點 (4) 3) / (2) 3)) 形成面積 : 12 6 9 9



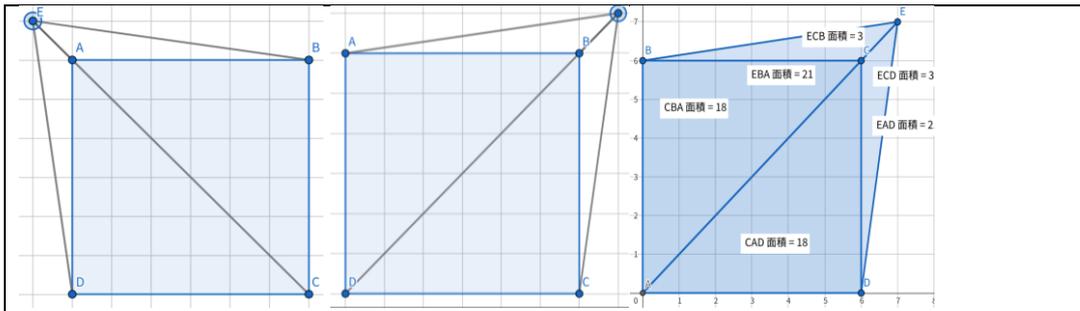
Case 9 : 點 (3) 1) / (3) 5)) 形成面積 : 9 9 15 3



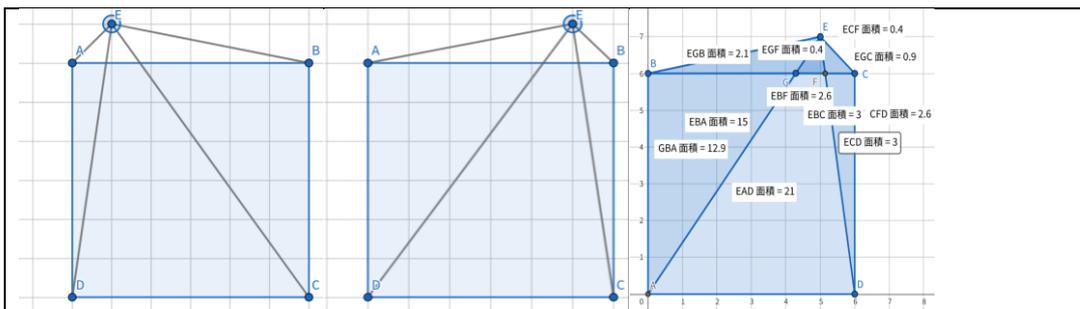
Case 10 點 (3) 3)) 形成面積 : 9 9 9
9

二、點在圖外

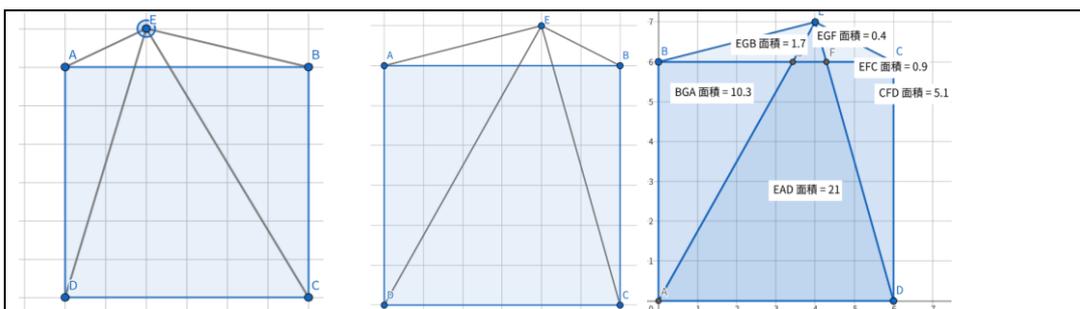
(面積表示以左→上→右)



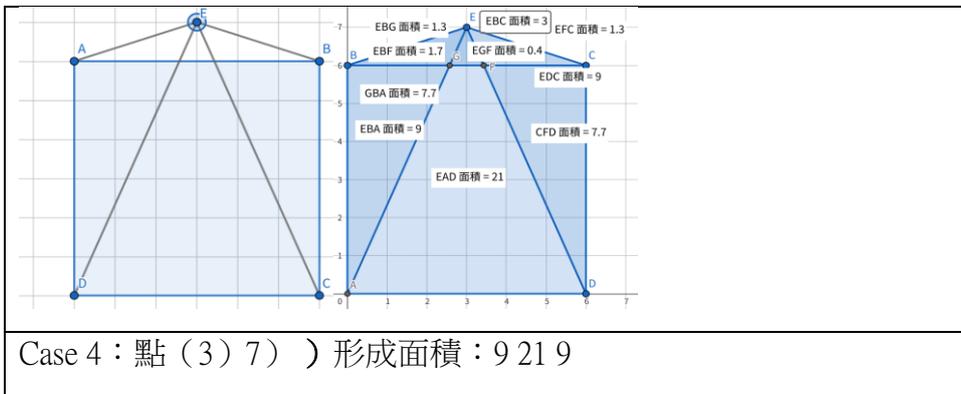
Case 1：點 $(-1, 7) / (7, 7)$ 形成面積：21 21



Case 2：點 $(1, 7) / (5, 7)$ 形成面積：15 21 3



Case 3：點 $(2, 7) / (4, 7)$ 形成面積：12 21 6



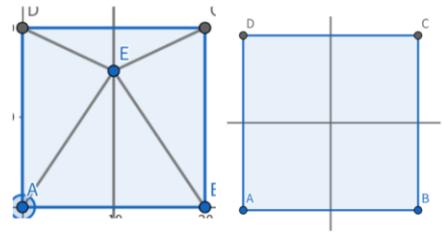
陸、討論

- 一、當點在正中央時，三角形面積相等且都為直角三角形。
- 二、當點在圖內且不在正中央，會發現每一組都有四張三角形面積相同的正方形。
- 三、當點在圖外且不落在中垂線上，會發現每一組都有八張三角形面積相同的正方形。
- 四、當點在中垂線上連至四個頂點時，上下皆呈等腰，左右面積相等。
- 五、當點在對角線上時，左右、上下兩兩面積相同。

柒、結論

- 一、由所有情況可以推論出：左 \triangle +右 \triangle =上 \triangle +下 \triangle
 - (一) 證明：假設左邊三角形的高為 k ，正方形邊長為 s ，故右邊三角形之高為 $s-k$
左邊三角形面積： $s \times k \div 2$
 - (二) 右邊三角形面積： $s (s - k) \div 2 = (s^2 - sk) \div 2$
 - (三) 兩者面積相加= $s^2 \div 2$ ，已知整個正方形面積為 s^2 ，可得知剩下兩個三角形面積和也是 $s^2 \div 2$
- 二、當點在圖內時，若點在任一條對角線上，會讓正方形內的三角形兩兩面積相等且對角線兩側的兩個角剛好互補，若剛好在兩個對角線的交點，將正方形平分完全相同的四等份且形成之四個角為 90 度。

(一) 證明：已知對角線將正方形平分成兩半，可
 先得知同側兩角互補，因正方形對角線也可
 平分角，角 CEG=角 AEG，AE=DC，
 EG=EG，故三角形 AEG 全等於三角形
 CEG，可用同一方法證明三角形 DGC 全等
 於三角形 DAG



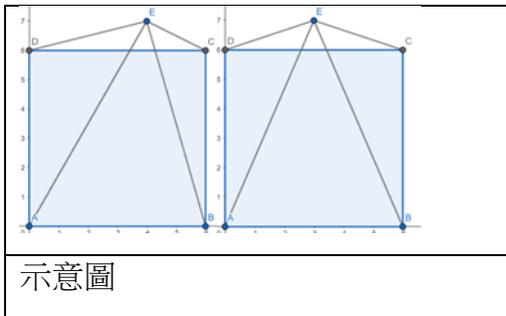
點在中垂線上示意圖 中垂線示意圖

三、當點在任一邊之中垂線時，三角形會全等 *中垂線交於邊上兩點稱為 F 和 G，動點稱為 E 在鉛直中垂線上時，左右兩個三角形會相似，在水平中垂線上時，上下兩個三角形會相似，且面積比等於 FE : EG

(一) 證明：由中垂線定理可知 AE=BE 且 DE=CE，又因 AD=CB，故三角形 ADE 全等於三角形 BCE，由於是等底三角形，所以面積比等於 FE : EG

四、當點在圖外時且形成三個三角形時，點同一高度時，中間三角形的大小永遠固定。

證明：將該點設為 (p) q)，邊長為 s，則三角形 ABE 的面積可視為 $s \times q \div 2$



捌、參考文獻資料

- 一、正方形 - 維基百科，取自 <https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%AD%A3%E6%96%B9%E5%BD%A2>
- 二、三角形 - 維基百科，取自 <https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%BD%A2>
- 三、面積 - 維基百科，取自 <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%9D%A2%E7%A7%AF>
- 四、